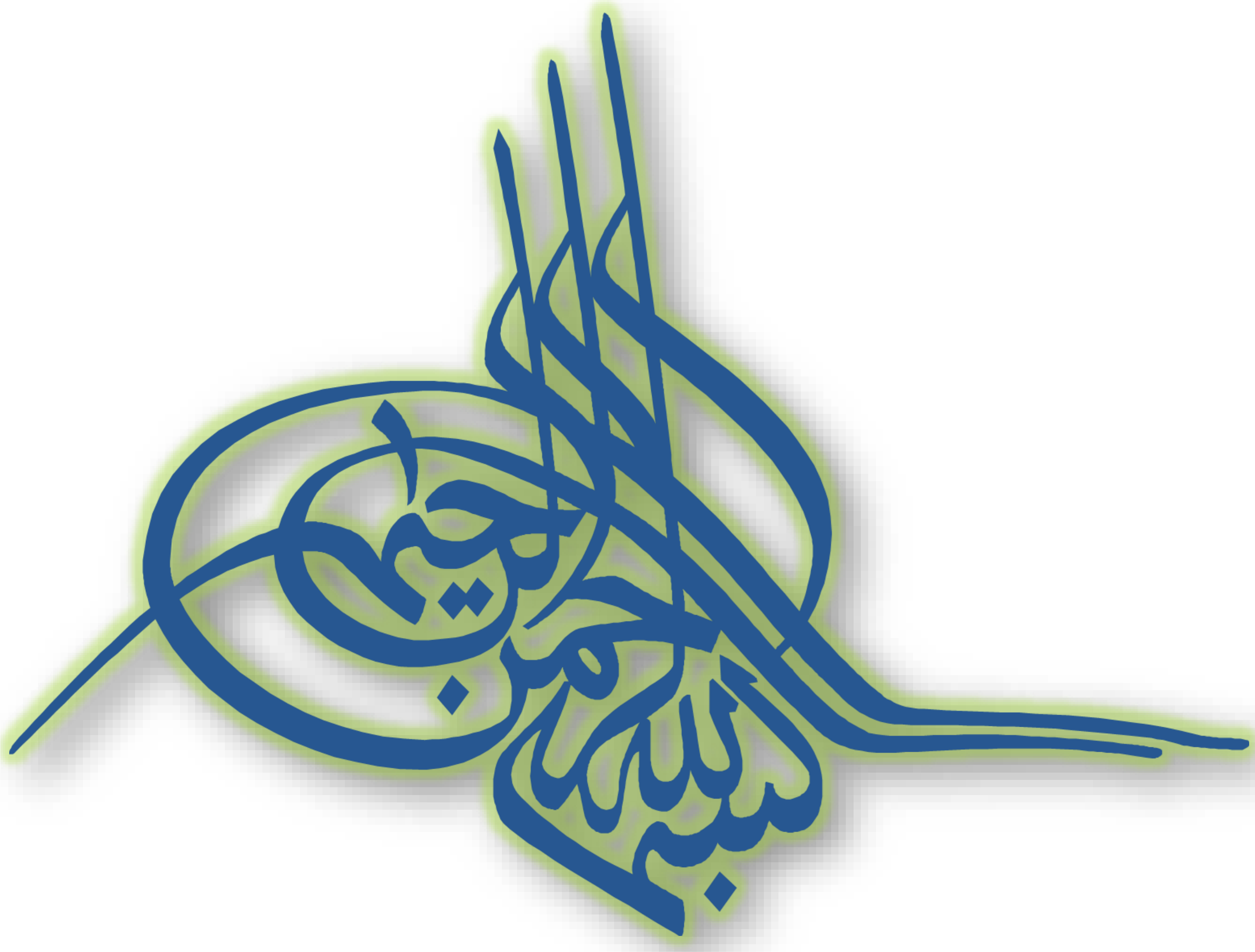
دانشگاه فنی و حرفه‌ای استان آذربایجان شرقی
East Azarbaijan University of Technical & Vocational

ارتعاشات

جلسه دوم، سوم و چهارم

مدرس:
دکتر علیرضا بابائی

آموزشکده فنی شماره ۲ تبریز

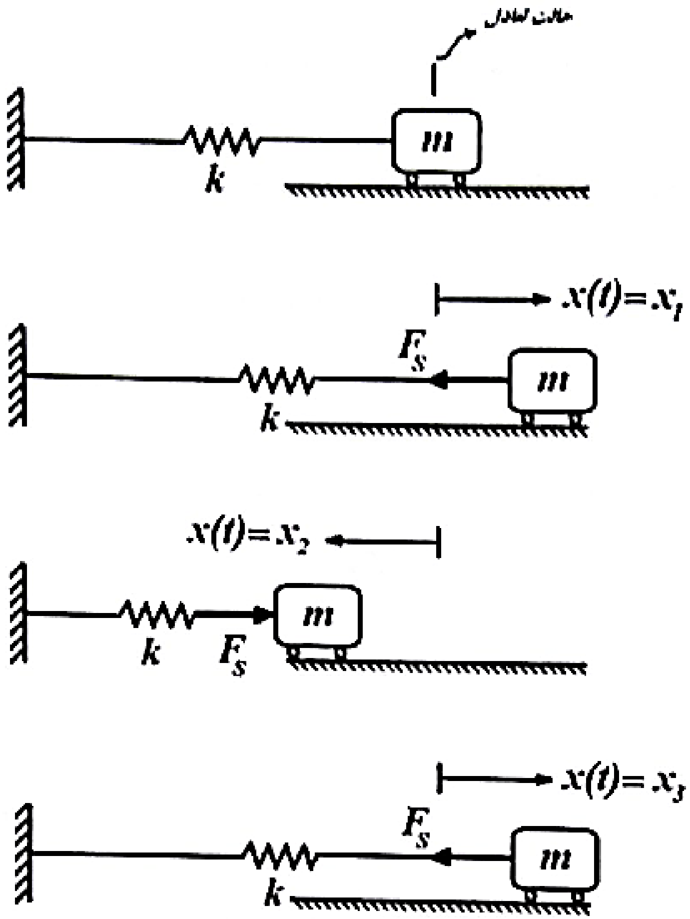

بسم الله الرحمن الرحیم

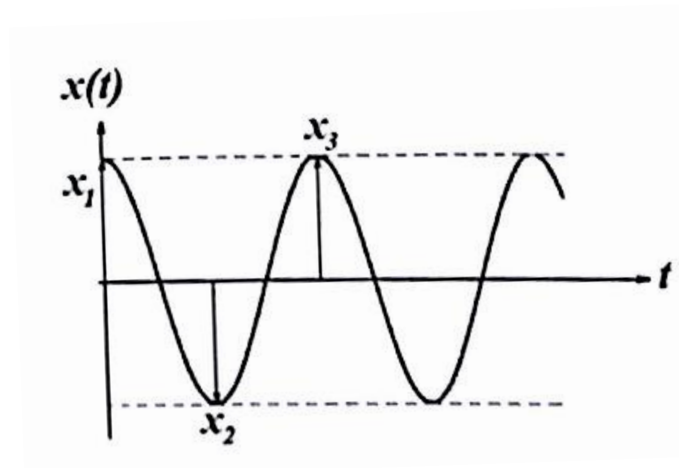
مبانی و مفاهیم پایه

ارتعاشات معمولاً یک رفتار جدایی‌ناپذیر از سیستم‌های مکانیکی است و در بسیاری از اوقات به عنوان یک پدیده‌ی نامطلوب به آن نگریسته می‌شود که باعث فرسودگی سازه‌های مکانیکی می‌گردد و عملکرد ماشین‌آلات و ابزارهای مکانیکی را مختل می‌نماید. بنابراین در بسیاری از موارد مهندسان تلاش می‌کنند که تا جای ممکن ارتعاشات ابزارها را کاهش داده و آن را مهار نمایند. در پاره‌ای از ابزارهای مکانیکی نیز از ارتعاشات برای انجام یک کار خاص و یا برای جذب و میرا نمودن انرژی ضربه استفاده می‌گردد، در نتیجه در چنین مواردی ارتعاشات دارای کاربردهای مفیدی است. در هر دو حالت (مهار کردن و یا ایجاد ارتعاش) برای رسیدن به رفتار مطلوب لازم است که طراح دارای دید مناسبی درباره‌ی فیزیک حاکم بر مسأله باشد. از این‌رو از دیرباز ارتعاشات مکانیکی مورد توجه و مطالعه‌ی مهندسان مکانیک بوده است.

مبانی و مفاهیم پایه

- چگونگی شکل گیری ارتعاشات





مبانی و مفاهیم پایه

- چگونگی شکل گیری ارتعاشات

چنانکه در مثال قبل دیدیم در یک سیستم ارتعاشی همواره یک نیروی بازگرداننده وجود دارد که می‌خواهد سیستم را به موقعیت تعادل برگرداند (مانند نیروی فنر)، اما این برای ارتعاش کافی نیست و ارتعاش در صورتی شکل می‌گیرد که پس از عمل کردن نیروی بازگرداننده، سیستم که به حرکت واداشته شده است، تمایل به توقف نداشته باشد (دارای اینرسی یا لختی باشد). بنابراین در یک سیستم مکانیکی حضور دو مؤلفه برای شکل‌گیری ارتعاشات ضرورت دارد که عبارتند از :

۱- نیروی بازگرداننده (نیروی فنر) که میخواهد سیستم را در حالت تعادل نگه دارد.

۲- تمایل به ادامه‌ی حرکت (اینرسی یا لختی) که می‌خواهد سیستم همچنان با سرعت یکنواخت به حرکت خود ادامه دهد .

بدیهی است که هرچه نیروی بازگرداننده بزرگتر باشد، زودتر بر اینرسی حرکت غلبه کرده و مجموعه را به حرکت در می‌آورد و یا آن را متوقف می‌کند و بنابراین دوره‌ی تناوب حرکت کاهش می‌یابد. بالعکس، هر چه لختی سیستم بیشتر شود، دیرتر سرعت گرفته و یا متوقف می‌شود و دوره‌ی نوسانی خود را در زمان بیشتری طی می‌کند (دوره‌ی تناوب حرکت افزایش می‌یابد).

مبانی و مفاهیم پایه

- اجزاء سیستم های ارتعاشی

چنانچه گفته شد برای شکل‌گیری ارتعاشات در یک سیستم، وجود دو بخش الزامی است:

۱- نیروی بازگرداننده (سختی)

۲- تمایل به ادامه‌ی حرکت (لختی)

علاوه بر این، همواره مکانیزم‌هایی در داخل سیستم ها وجود دارند که می‌خواهند انرژی ارتعاشی را میرا نمایند. در بیشتر سیستم‌های مکانیکی نیروهای بازدارنده از جنس نیروهای الاستیک هستند و غالبا با فنرهای خطی مدلسازی می‌شوند. میراگر نیز معمولا از نوع ویسکوز، اصطکاکی و یا هیسترزیس هستند. در ادامه، جهت آشنایی با اجزای سیستم‌های ارتعاشی آن‌ها را به اختصار مورد بحث قرار می‌دهیم.

دانشگاه فنی و حرفه‌ای استان آذربایجان شرقی
East Azarbaijan University of Technical & Vocational

مبانی و مفاهیم پایه

- اجزاء سیستم های ارتعاشی
  - اینرسی

بنابر قانون دوم نیوتون می‌دانیم که هر ذره تمایل دارد که با سرعت ثابت و بر روی یک مسیر مستقیم حرکت نماید و یا آنکه در جای خود ثابت بماند، مگر آنکه نیرویی به آن وارد شود و باعث تغییر سرعت و یا تغییر مسیر ذره گردد. هر سیستم مکانیکی از مجموعه بسیار بزرگی از ذرات ساخته شده است و رفتار کلی مجموعه برآیندی از رفتار تمامی ذرات آن مجموعه در واکنش به نیروهای داخلی و خارجی است.

در سیستم‌های مکانیکی اینرسی حرکت غالباً در دو شکل اینرسی خطی و اینرسی دورانی خود را نشان می‌دهد.

مبانی و مفاهیم پایه

- اجزاء سیستم های ارتعاشی
  - اینرسی

در این المان انرژی بصورت انرژی جنبشی (T) و پتانسیل (U) ذخیره می‌شود. جرم را صلب فرض می‌کنیم که در حین ارتعاش سرعت‌های مختلف به خود گرفته و انرژی جنبشی آن مرتباً تغییر می‌کند. طبق قانون دوم نیوتن، نیروی ایجاد شده در جسم با شتاب آن متناسب است، که ضریب تناسب جرم (m) نام دارد و واحد اندازه‌گیری آن در سیستم SI ، (kg)است.

حاصل ضرب جرم در شتاب برابر نیروی وارده بر جرم است. حاصل ضرب نیرو در تغییر مکان در راستای نیرو، کار معادل می‌باشد. وقتی کار مثبت باشد انرژی جنبشی افزایش و وقتی کار منفی باشد انرژی جنبشی کاهش می‌یابد.

$$F = m\ddot{x}$$

$$T = 1/2\, m\dot{x}^2$$

$$V = mgx$$

برای جسمی که حرکت دورانی دارد، قانون دوم نیوتن بصورت رابطه گشتاور و شتاب زاویه‌ای بیان می‌گردد که ضریب تناسب رابطه، ممان اینرسی قطبی نام دارد.

$$M = I\ddot{\theta}$$ (M گشتاور و I ممان اینرسی)

مبانی و مفاهیم پایه

- اجزاء سیستم های ارتعاشی
  - اینرسی (جرم)

برای جسمی که علاوه بر حرکت انتقالی، حرکت دورانی نیز دارد (مانند دوران دیسک استوانه‌ای بر روی زمین) انرژی جنبشی بصورت زیر خواهد بود

$$T = T_{Tr} + T_{Rot}$$

$$T_{Tr} = 1/2 m\dot{x}^2 \quad , \quad T_{Rot} = 1/2\, I_0 \dot{\theta}^2$$

که در T_{Rot}، I_0 ممان اینرسی قطبی حول نقطه دوران می‌باشد که برابر:

$$I_0 = I_c + md^2$$

و در این رابطه I_c ممان اینرسی حول مرکز جرم و d فاصله نقطه دوران تا مرکز جرم می‌باشد.

برای یک دیسک استوانه‌ای به جرم m و شعاع R داریم

$$I_c = 1/2\, mR^2$$

برای یک حلقه به جرم m و شعاع R داریم

$$I_c = mR^2$$

برای یک میله به جرم m و طول L داریم

$$I_c = \frac{mL^2}{12}$$

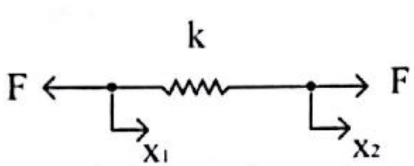
مبانی و مفاهیم پایه

- اجزاء سیستم های ارتعاشی
  - سختی (فنر)

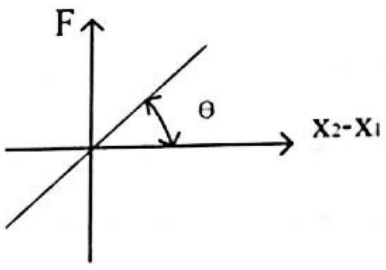
در این المان انرژی پتانسیل ذخیره می‌شود. فنر خاصیت ارتجاعی دارد و معمولاً از جرم آن صرف نظر می‌شود. موقعی که فنر کشیده یا فشرده شود در آن نیروی مقاوم بوجود می‌آید. نیروی ایجاد شده در فنر (F) متناسب با اختلاف جابجایی دو انتهای آن $(x_2 - x_1)$ است. ضریب تناسب، سختی فنر یا ثابت فنر نام دارد که با (k) نشان داده می‌شود. واحد اندازه‌گیری آن در سیستم SI، N/m می‌باشد. با توجه به نمودار نیرو- جابجایی فنر، برای نیروی ایجاد شده در آن می‌توان نوشت

$$\tan(\theta) = \frac{F}{x_2 - x_1} = k \ (N/m)$$

$$F = k\,(x_2 - x_1)$$



نمایش فنر در مدلسازی گسسته



نمودار نیرو – جابجایی فنر

مبانی و مفاهیم پایه

- اجزاء سیستم های ارتعاشی
  - سختی (فنر)

با توجه به اینکه انرژی پتانسیل ذخیره شده در فنر (U) با مساحت زیر نمودار نیرو- جابجایی برابر است، بنابراین خواهیم داشت

$$U = \int F\,dx = 1/2\,k\,(x_2 - x_1)^2$$

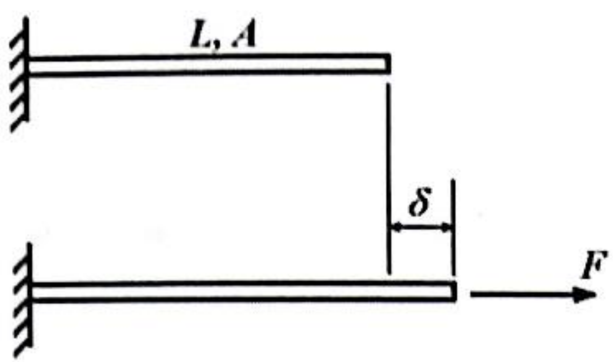
در بیشتر سیستم‌های مکانیکی فنرها نقش نیروی بازگرداننده را دارند. فنرها اجزایی هستند که تحت کشش، فشار و پیچش و یا هر نوع بارگذاری نیرویی دیگر، دچار تغییر شکل می‌شوند و پس از حذف نیرو به شکل اولیه خود باز می‌گردند. به عنوان مثال شکل ۲-۵ یک میله را نشان می‌دهد که تحت کشش دچار تغییر شکل می‌شود. شکل منحنی نیرو- جابجایی میله نیز در این شکل نشان داده شده است. بر اساس نتایج آزمایش‌های تجربی، رابطه‌ی بین نیرو و جابجایی در حالت کلی یک رابطه‌ی خطی نیست؛ اما در محدوده‌ی تغییر شکل‌های کوچک می‌توان رفتار ماده را خطی فرض نمود و رابطه‌ی نیرو – جابجایی را به صورت زیر نوشت:

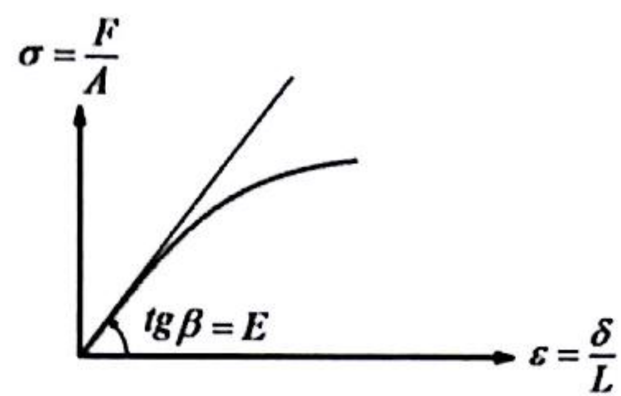
مبانی و مفاهیم پایه

- اجزاء سیستم های ارتعاشی
  - سختی (فنر)

$$\delta = \frac{F\,L}{E\,A}$$

که در آن F نیروی اعمال شده، L طول میله، E ضریب الاستیسیته‌ی ماده و A سطح مقطع میله است.





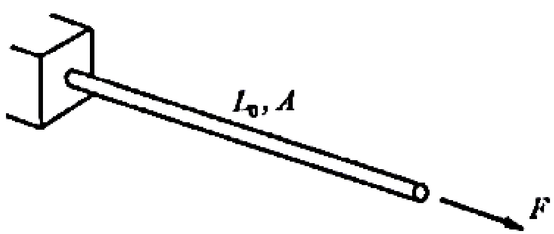
مبانی و مفاهیم پایه

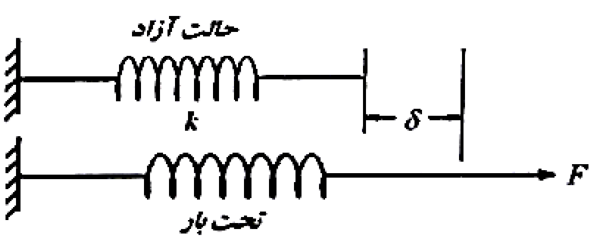
- اجزاء سیستم های ارتعاشی
  - سختی (فنر)

رابطه‌ی بدست آمده را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$F = k\,\delta, \qquad k = \frac{EA}{L} \qquad (۱-۲)$$

در رابطه‌ی اخیر k ضریب سختی کششی میله نامیده می‌شود. بدین ترتیب می‌توان یک میله را که تحت کشش یا فشار است، در تغییر شکل‌های کوچک، با یک فنر خطی معادلسازی کرد. شکل ۲-۶ این موضوع را نشان می‌دهد.





مبانی و مفاهیم پایه

- اجزاء سیستم های ارتعاشی
  - سختی (فنر)

اگر همان میله را تحت پیچش قرار دهیم، با فرض خطی بودن رفتار ماده، رابطه‌ی بین پیچش ماده و گشتاور پیچشی اعمال شده بصورت زیر خواهد بود:

$$\theta = \frac{T\,L}{G\,J}$$

که در آن، G مدول برشی ماده ، J گشتاور دوم سطح ، T گشتاور پیچشی و L طول میله است . به این ترتیب میله را می‌توان با یک فنر پیچشی مدلسازی نمود که دارای سختی پیچشی k_t است:

$$T = k_t\,\theta, \qquad k_t = \frac{G\,J}{L} \qquad (۲-۲)$$

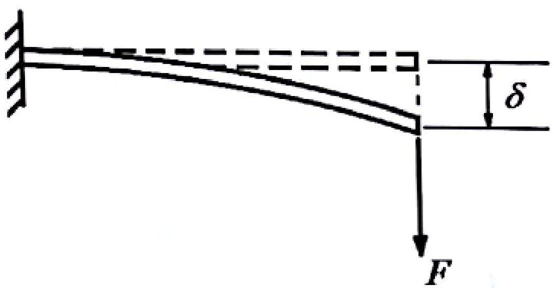
مبانی و مفاهیم پایه

- اجزاء سیستم های ارتعاشی
  - سختی (فنر)

حال اگر به انتهای همان میله، نیروی جانبی F اعمال شود (شکل ۲-۷)، رابطه‌ی بین جابجایی و نیروی اعمال شده را می‌توان بصورت زیر استخراج نمود:

$$\delta = \frac{F L^{۳}}{۳E I}$$

که در این رابطه I گشتاور دوم سطح میله ، E مدول یانگ میله و L طول میله است. در این حالت نیز میله را می‌توان یک فنر با ضریب سختی $k = \frac{۳E I}{L^{۳}}$ در نظر گرفت.

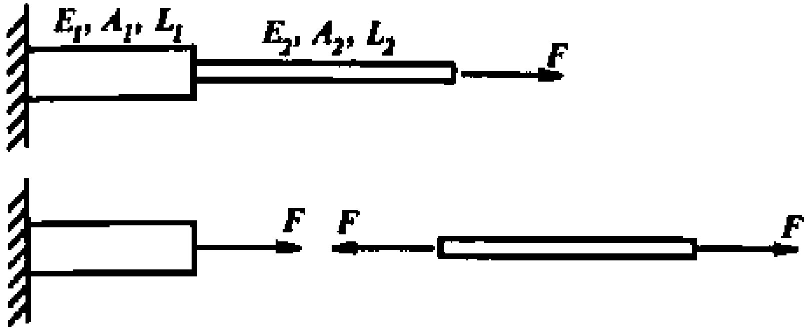


مبانی و مفاهیم پایه

- اجزاء سیستم های ارتعاشی
  - سختی (فنر)
    - فنرهای سری

در هنگام محاسبه سختی یک سیستم در مقابل نیروی اعمالی، ممکن است لازم باشد که آن را به بخش‌های مختلف تقسیم نماییم، برای هر بخش از آن یک سختی بدست آوریم و در نهایت سختی معادل کل سیستم را محاسبه کنیم. به عنوان مثال مطابق شکل ۲-۱۱ یک میله با سطح مقطع متغیر را در نظر بگیرید که تحت کشش نیروی F قرار دارد. این میله را می‌توان به صورت دو میله مجزا در نظر گرفت که هر یک از میله‌ها نیز خود تحت کشش نیروی F قرار گرفته است. جابجایی انتهای آزاد میله برابر است با تغییر طول کل میله‌ها:

$$\delta = \delta_۱ + \delta_۲ = \frac{F L_۱}{E_۱ A_۱} + \frac{F L_۲}{E_۲ A_۲} = \frac{F}{k_۱} + \frac{F}{k_۲}$$



که در آن k_1 و k_2 به ترتیب سختی معادل میله های ۱ و ۲ هستند.

مبانی و مفاهیم پایه

- اجزاء سیستم های ارتعاشی
  - سختی (فنر)
    - فنرهای سری

با فرض $\delta = \frac{F}{k}$، رابطه‌ی بالا را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{F}{k} = \frac{F}{k_۱} + \frac{F}{k_۲}$$

و یا اینکه

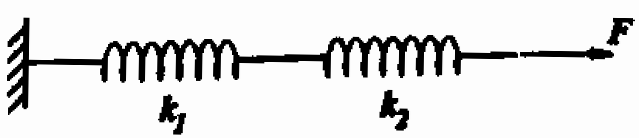
$$\frac{۱}{k} = \frac{۱}{k_۱} + \frac{۱}{k_۲} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{k_۱ k_۲}{k_۱ + k_۲} \qquad (۳-۲)$$

مبانی و مفاهیم پایه

- اجزاء سیستم های ارتعاشی
  - سختی (فنر)
    - فنرهای سری

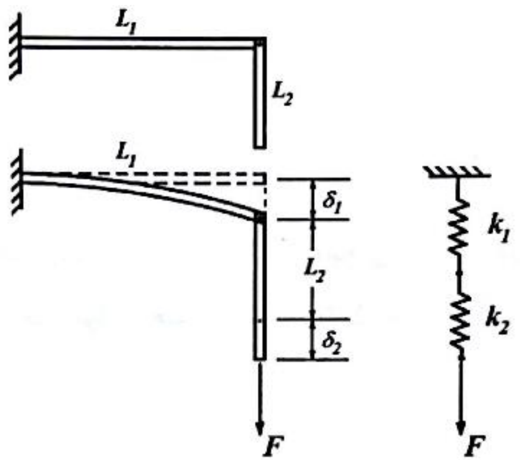
در این حالت میله به صورت دو فنر مدل شده است که مانند شکل ۲-۱۲ در امتداد هم قرار گرفته‌اند و جابجایی‌های آنها با همدیگر جمع می‌شود. در چنین حالتی گفته می‌شود که دو فنر در حالت سری قرار دارند. به عنوان مثالی دیگر می‌توان دو میله را در نظر گرفت که به هم لولا شده‌اند و مطابق شکل ۲-۱۳ تحت نیرو قرار گرفته‌اند. در این حالت نیز جابجایی دو میله نیز با هم جمع می‌شود و بنابراین می‌توان آنها را به صورت دو فنر سری در نظر گرفت. در نتیجه سختی کل سیستم برابر است با

$$k=\frac{k_{1}k_{2}}{k_{1}+k_{2}},\qquad k_{1}=\frac{3E_{1}I_{1}}{L_{1}^{3}},\qquad k_{2}=\frac{E_{2}A_{2}}{L_{2}}$$



مبانی و مفاهیم پایه

- اجزاء سیستم های ارتعاشی
  - سختی (فنر)
    - فنرهای سری



نکته: هنگامی که دو فنر به صورت سری قرار می‌گیرند، اگر سختی یکی از آنها از دیگری بسیار بزرگتر باشد ($k_1/k_2 \rightarrow \infty$)، می‌توان سختی کل را معادل فنر دیگر در نظر گرفت:

$$k = \lim_{\frac{k_۱}{k_۲} \to \infty} \frac{k_۱ k_۲}{k_۱ + k_۲} = k_۲$$

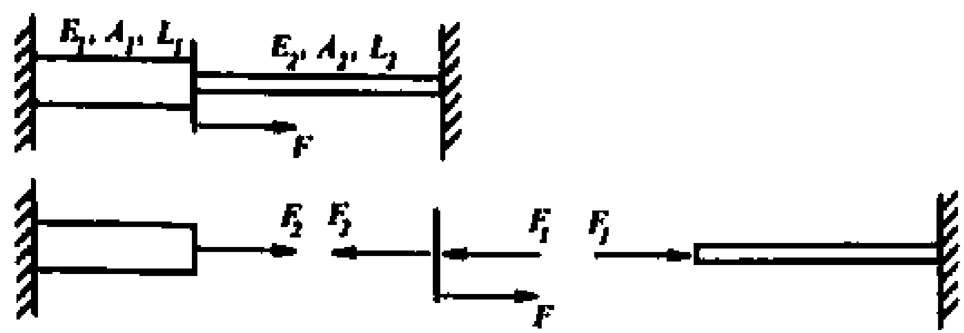
به عنوان مثال اگر در شکل ۲-۱۳ تغییر طول میله ۱ ناچیز باشد ($k_۱ >> k_۲$) آنگاه می‌توان میله‌ی ۱ را صلب در نظر گرفت و سختی کل میله را معادل سختی میله‌ی ۲ در نظر گرفت.

مبانی و مفاهیم پایه

- اجزاء سیستم های ارتعاشی
  - سختی (فنر)
    - فنرهای موازی

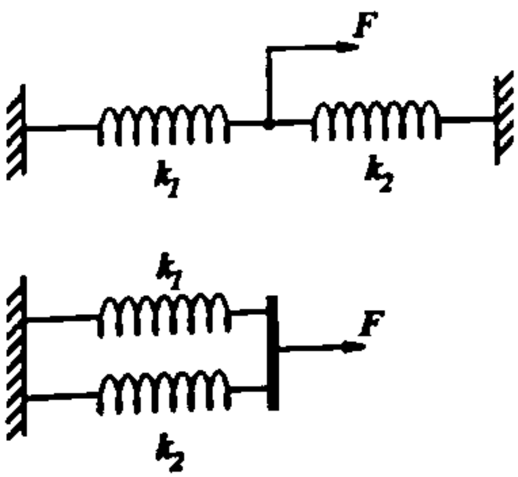
مطابق شکل ۲-۱۴ میله‌ای را در نظر بگیرید که در دو انتهای خود دارای تکیه‌گاه گیردار است و در جایی در میانه‌ی میله تحت تأثیر نیروی F قرار گرفته است. اگر دو بخش میله را که در دو سمت محل اعمال نیرو قرار دارند، مانند دو میله‌ی مجزا بررسی کنیم، با توجه به شکل ملاحظه می‌شود که در این حالت تغییر طول دو میله برابر و یکسان است، اما مقاومت دو میله در برابر تغییر شکل یکسان نیست. برای ایجاد یک تغییر شکل خاص، نیروی F باید همزمان بر نیروی مقاوم هر دو میله غلبه نماید، یعنی اینکه:

$$F = F_1 + F_2 = \frac{E_2 A_1 \delta}{L_1} + \frac{E_2 A_2 \delta}{L_2}$$
$$= k_1 \delta + k_2 \delta$$



مبانی و مفاهیم پایه

- اجزاء سیستم های ارتعاشی
  - سختی (فنر)
    - فنرهای موازی



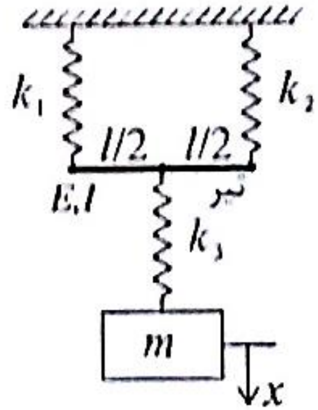
با فرض $F = k\delta$، بدست می‌آید:

$$k\delta = k_1\delta + k_2\delta \;\Rightarrow\; k = k_1 + k_2 \qquad (۴-۲)$$

پس در این حالت می‌توان مجموعه را با دو فنر مدلسازی کرد که دارای جابجایی یکسان هستند و نیروی مقاوم آنها با همدیگر جمع می‌شود. در این صورت گفته می‌شود که دو فنر موازی هستند (شکل ۲-۱۵). در شکل ۲-۱۵ دو حالت نشان داده شده معادل همدیگر هستند.

مبانی و مفاهیم پایه

- اجزاء سیستم های ارتعاشی
  - سختی معادل
    - مثال: سختی معادل سیستم مقابل را بدست آورید. از جرم میله صرفنظر کنید



حل: k_1 و k_2 به صورت موازی هستند. بنابراین:

$$k_{12} = k_1 + k_2$$

برای تیر داریم:

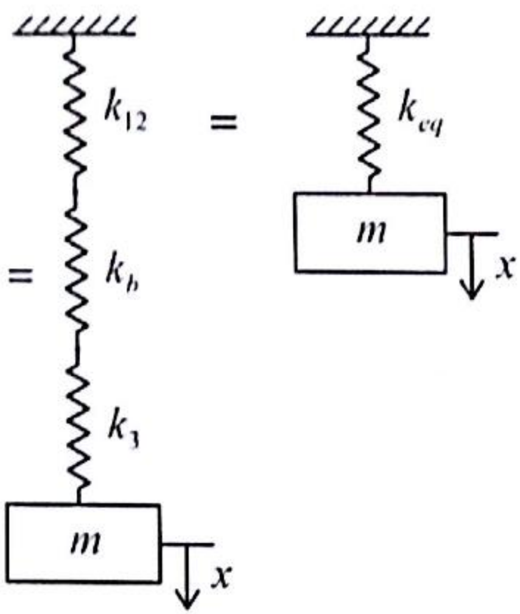
$$k_b = \frac{48EI}{l^3}$$

حال سه فنر به صورت سری k_{12} ، k_b ، k_3 را داریم که k_{eq} مطابق رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_{12}} + \frac{1}{k_b} + \frac{1}{k_3}$$

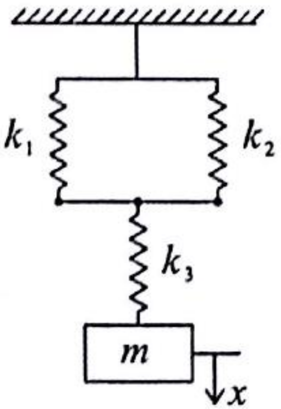
جواب

$$k_{eq} = \frac{k_{12}k_b k_3}{k_b k_3 + k_{12}k_3 + k_{12}k_b}$$



مبانی و مفاهیم پایه

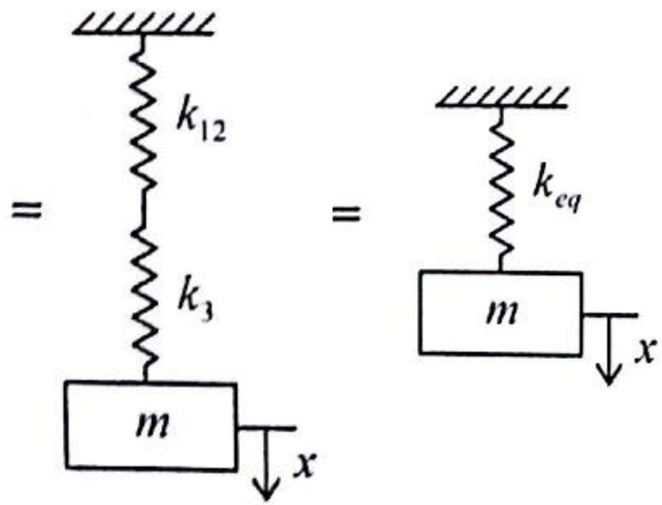
- اجزاء سیستم های ارتعاشی
  - سختی معادل
    - مثال: سختی معادل سیستم مقابل را بدست آورید. از جرم میله ها صرفنظر کنید



حل: k_1 ، k_2 به صورت موازی هستند. بنابراین:

$$k_{12} = k_1 + k_2$$

و دو فنر k_{12} و k_3 به صورت سری هستند که می‌توان نوشت:

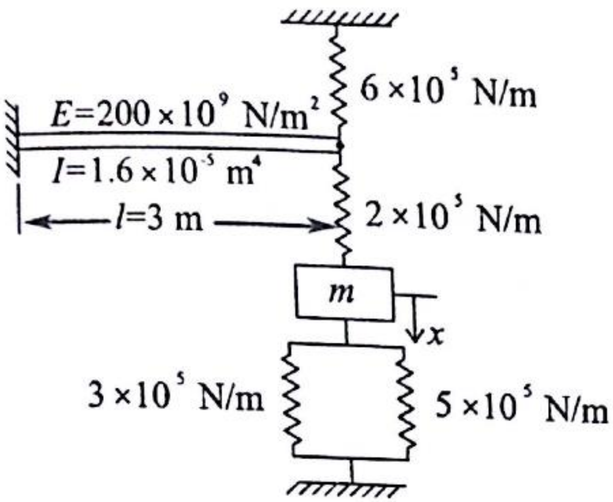


$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_{12}} + \frac{1}{k_3} = \frac{k_3 + k_{12}}{k_{12}k_3} = \frac{k_3 + k_1 + k_2}{(k_1 + k_2)k_3}$$

جواب
$$k_{eq} = \frac{(k_1 + k_2)k_3}{(k_1 + k_2 + k_3)}$$

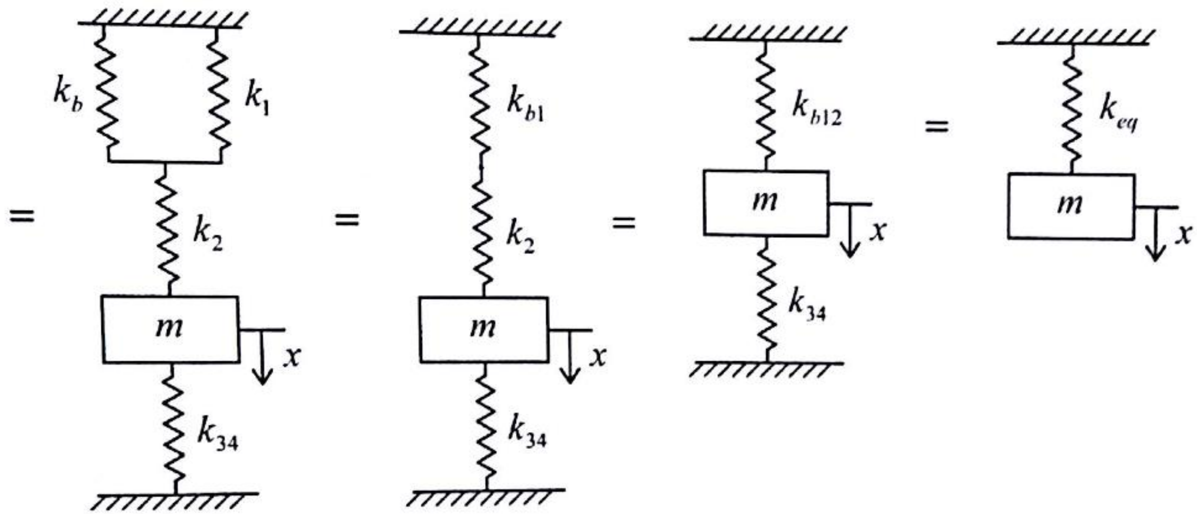
مبانی و مفاهیم پایه

- اجزاء سیستم های ارتعاشی
  - سختی معادل
    - مثال: سختی معادل سیستم زیر را بدست آورید.



مبانی و مفاهیم پایه

- اجزاء سیستم های ارتعاشی
  - سختی معادل
    - مثال:



$$k_۱ = ۶\times۱۰^{۵} \;،\; k_b = \frac{۳EI}{l^{۳}} = \frac{۳(۲۰۰\times۱۰^{۹})(۱/۶\times۱۰^{-۵})}{۳^{۳}} = ۳/۵۶\times۱۰^{۵}$$

$$k_۲ = ۲\times۱۰^{۵} \;،\; k_{۳۴} = k_۳ + k_۴ = (۳+۵)۱۰^{۵} = ۸\times۱۰^{۵}$$

$$k_{b۱} = k_b + k_۱ = (۳/۵۶ + ۶)۱۰^{۵} = ۹/۵۶\times۱۰^{۵}$$

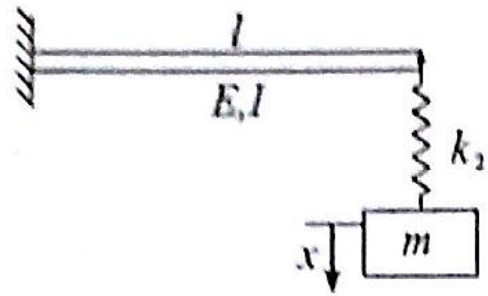
$$\frac{۱}{k_{b۱۲}} = \frac{۱}{k_{b۱}} + \frac{۱}{k_۲} = \frac{۱}{۹/۵۶\times۱۰^{۵}} + \frac{۱}{۲\times۱۰^{۵}} \rightarrow k_{b۱۲} = ۱/۶۵۴\times۱۰^{۵}$$

$$k_{eq} = k_{b۱۲} + k_{۳۴} = ۱/۶۵۴\times۱۰^{۵} + ۸\times۱۰^{۵}$$

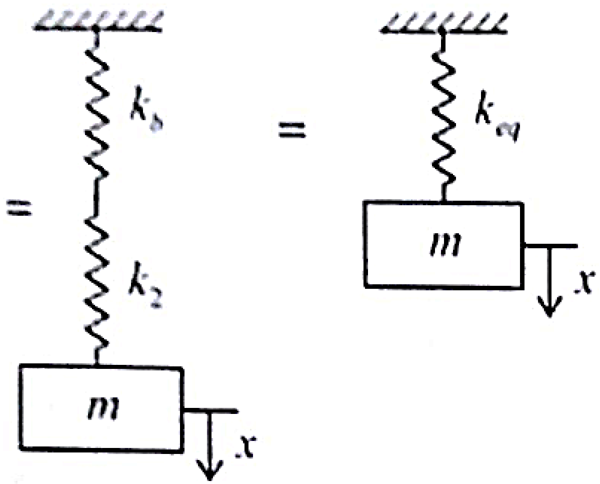
$$k_{eq} = ۹/۶۵۴\times۱۰^{۵}\ \mathrm{N/m}$$ جواب

مبانی و مفاهیم پایه

- اجزاء سیستم های ارتعاشی
  - سختی معادل
    - مثال: سختی معادل سیستم زیر را بدست آورید. از جرم تیر صرفنظر کنید



حل:



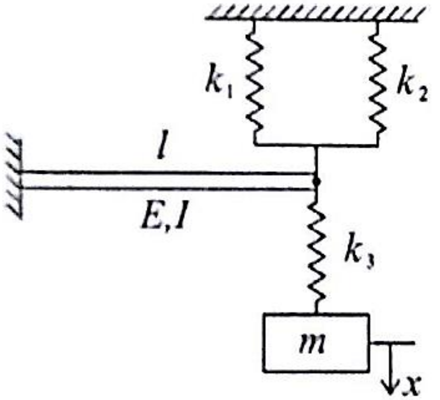
$$k_b = \frac{3EI}{l^3}$$

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_b} + \frac{1}{k_2} = \frac{k_2 + k_b}{k_b k_2}$$

جواب
$$k_{eq} = \frac{k_b k_2}{k_2 + k_b} = \frac{k_2\left(\frac{3EI}{l^3}\right)}{k_2 + \frac{3EI}{l^3}}$$

مبانی و مفاهیم پایه

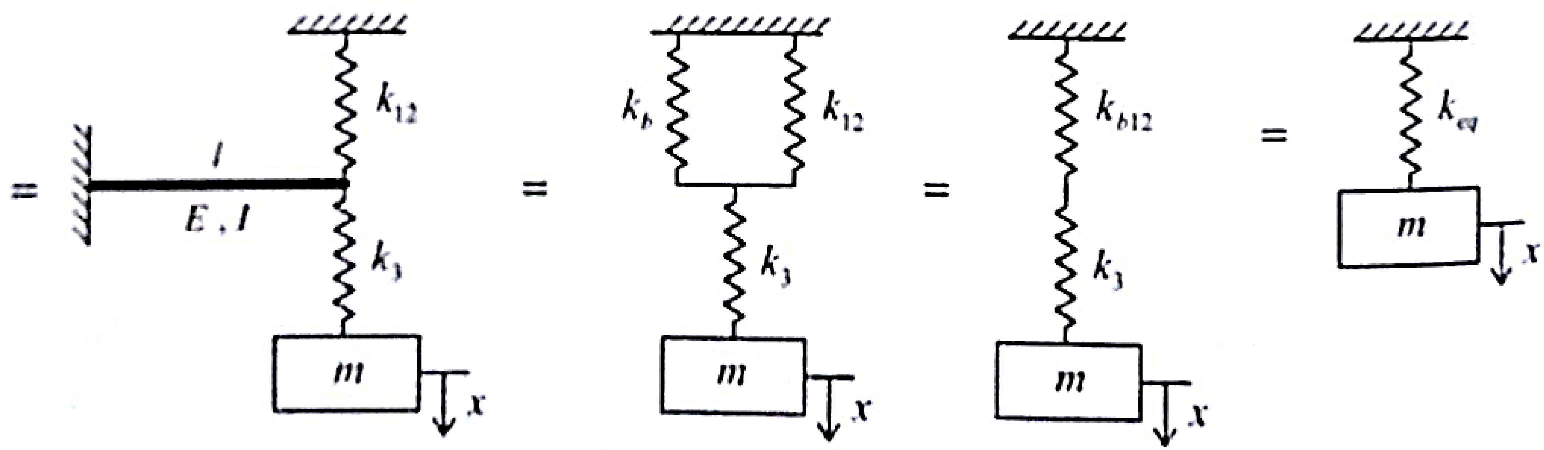
- اجزاء سیستم های ارتعاشی
  - سختی معادل
    - مثال: سختی معادل سیستم مقابل را بدست آورید.
      از جرم تیر صرفنظر کنید



حل:

$$k_{12} = k_1 + k_2$$

$$k_b = \frac{3EI}{l^3}$$



$$k_{b12} = k_b + k_{12} = \frac{3EI}{l^3} + (k_1 + k_2)$$

مبانی و مفاهیم پایه

- اجزاء سیستم های ارتعاشی
  - میراگر (دمپر)

در این المان انرژی سیستم بصورت گرما و اصطکاک تلف می‌شود که فرآیندی بازگشت ناپذیر (غیر کانسروایتو) است. این المان وسیله ای برای استهلاک تدریجی انرژی (دمپر) است. در این المان نیروی ایجاد شده (F_d) متناسب با اختلاف سرعت دو انتهای آن است. این المان فاقد جرم و خاصیت کشسانی است. ضریب تناسب، ضریب میرایی نام دارد که با (C) نشان داده می‌شود و واحد اندازه‌گیری آن در سیستم SI، $(N.Sec/m)$ است. با توجه به نمودار نیرو- سرعت میرا کننده (مستهلک کننده) لزج، برای نیروی ایجاد شده در آن می‌توان نوشت

$$\tan(\theta) = \frac{F_d}{\dot{x}_2 - \dot{x}_1} = c\left(\frac{N.\text{sec}}{m}\right)$$

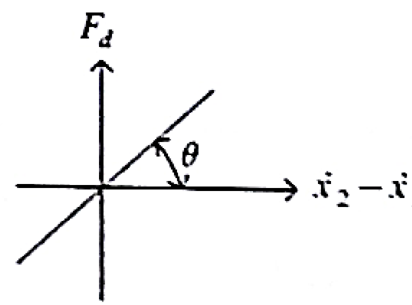
$$F_d = c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

مبانی و مفاهیم پایه

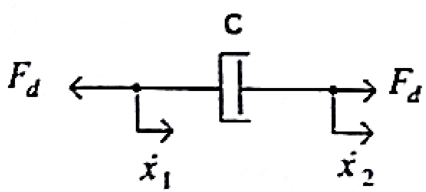
- اجزاء سیستم های ارتعاشی
  - میراگر (دمپر)

$$\tan(\theta) = \frac{F_d}{\dot{x}_2 - \dot{x}_1} = c\left(\frac{N.\sec}{m}\right)$$

$$F_d = c\left(\dot{x}_2 - \dot{x}_1\right)$$



نمودار نیرو – سرعت برای میراکننده لزج



نمایش میراکننده لزج در مدلسازی گسسته

با توجه به اینکه توان تلف شده در مستهلک کننده لزج (P_c) با مساحت زیر نمودار نیرو– سرعت برابر است، بنابراین خواهیم داشت

$$P_c = \int F_d . d\dot{x} = 1/2\, c\left(\dot{x}_2 - \dot{x}_1\right)^2$$

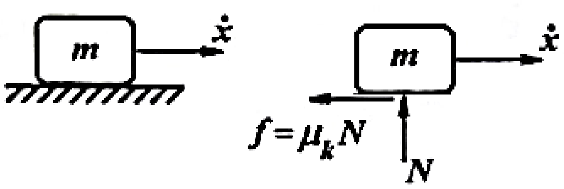
مبانی و مفاهیم پایه

- اجزاء سیستم های ارتعاشی
  - میراگرها (دمپرها)

چنانکه گفته شد، میراگرها (میراکننده‌ها) اجزایی از سیستم هستند که انرژی ارتعاشی سیستم را میرا می‌نمایند. میراگرها عموماً شامل سه دسته‌اند که عبارتند از میراگرهای اصطکاکی، میراگرهای ویسکوز و میراگرهای هیسترزیس.

- میراگرهای اصطکاکی

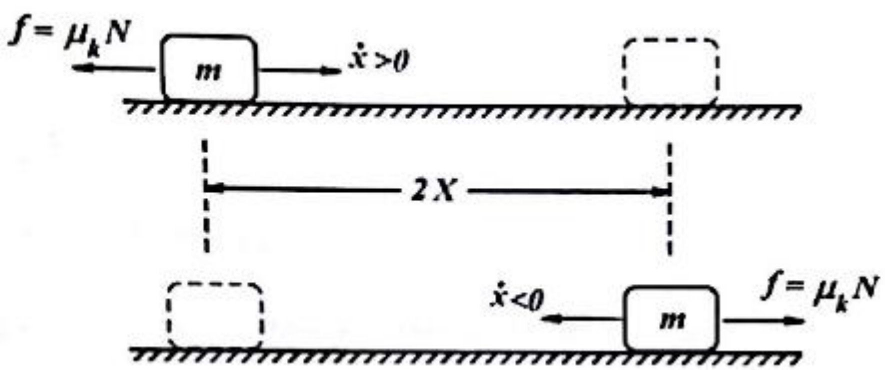
در بسیاری از سیستم‌های مکانیکی، بخش‌هایی از سیستم بر روی همدیگر ساییده شده و جابجا می‌شوند. وجود اصطکاک بین این بخش‌ها باعث می‌گردد مقداری از انرژی مجموعه به صورت سایش سطح و گرما هدر رود. در نتیجه وجود اصطکاک باعث می‌گردد بخشی از انرژی جنبشی سیستم از بین رود و بنابراین ارتعاشات سیستم به تدریج میرا شده و دامنه‌ی آن کاهش یابد.



مبانی و مفاهیم پایه

- اجزاء سیستم های ارتعاشی
  - میراگرها (دمپرها)
    - میراگرهای اصطکاکی

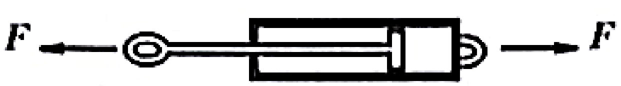
که در آن N نیروی عمودی بین سطوح تماس، μ_k ضریب اصطکاک خشک و F نیروی اصطکاک بین دو سطح است. نیروی اصطکاک همواره در جهت عکس جابجایی نسبی و به صورت عمل و عکس‌العمل به دو سطح اعمال می‌گردد:



مبانی و مفاهیم پایه

- اجزاء سیستم های ارتعاشی
  - میراگرها (دمپرها)
    - میراگرهای ویسکوز

هنگامی که یک جسم جامد درون یک سیال حرکت می‌کند، به دلیل خاصیت چسبندگی سیال، از طرف سیال بر دیواره‌های جسم نیروهای برشی وارد می‌شود که مقدار این نیرو متناسب با سرعت جسم نسبت به سیال است. در بسیاری از مسائل مهندسی برای ایجاد میرایی در ارتعاشات به وجود آمده، از این خاصیت استفاده شده و میراگرهای ویسکوز در مجموعه تعبیه می‌شوند. به عنوان مثال در سیستم تعلیق خودروها، موتورسیکلت ها و ... از میراگرهای ویسکوز که با عنوان کمک فنر شناخته می‌شوند، استفاده می‌شود. شکل ۲-۱۹ نمای کلی یک میراگر ویسکوز را نشان می‌دهد که در آن یک پیستون در داخل یک استوانه که با روغنی لزج پر شده است، حرکت می‌نماید.



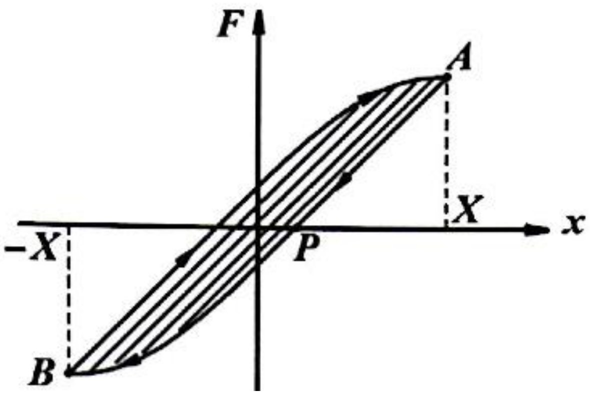
مبانی و مفاهیم پایه

- اجزاء سیستم های ارتعاشی
  - میراگرها (دمپرها)
    - میراگرهای ویسکوز

نمایی از فنر و کمک فنر یک موتورسیکلت

مبانی و مفاهیم پایه

- اجزاء سیستم های ارتعاشی
  - میراگرها (دمپرها)
    - میراگرهای هیسترزیس



منحنی نیرو-جابجایی برای یک میراگر هیسترزیس

اگرچه بسیاری اوقات برای شبیه‌سازی رفتار ارتعاشی فنرها، با فرض کوچک بودن دامنه‌ی ارتعاشات، رفتار فنر را در حول و حوش نقطه‌ی تعادل الاستیک و خطی در نظر می‌گیریم، اما در واقعیت رفتار فنرها و اصولاً مواد مختلف به صورت کامل الاستیک و خطی نیست.

در یک سیستم ارتعاشی واقعی همواره بخشی از سیستم که دچار تغییر شکل می‌شود و خاصیت فنری به آن نسبت داده می‌شود، همزمان نقش یک میراکنندی ویسکوز را نیز داراست که به میرایی هیسترزیس مربوط است.

اگر نقش دیگر انواع میرایی در سیستم قابل توجه باشد، می‌توان از میرایی هیسترزیس که معمولاً مقدار کوچکی است، صرفنظر نمود.

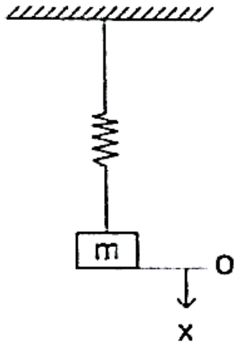
مبانی و مفاهیم پایه

- درجه آزادی

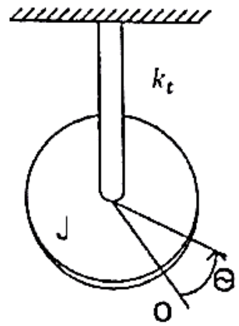
درجه آزادی در یک سیستم حداقل تعداد متغیرهای مستقل مکانی است که برای مشخص کردن موقعیت جسم در فضا لازم است. اگر موقعیت سیستم به گونه‌ای باشد که تنها یک مختصه برای تعیین آن کافی باشد در این صورت سیستم دارای یک درجه آزادی است. در این حالت یک ذره آزاد که در فضا حرکت کلی دارد. دارای شش درجه آزادی است و جسم صلب در فضا دارای شش درجه آزادی می‌باشد، زیرا سه مختص راستای موقعیت مرکز جرم و سه مختص دورانی موقعیت دورانی جسم را نسبت به محورها تعیین می‌کند. حرکت اجرام را می‌توان توسط عواملی محدود کرد که باعث کاستن درجات آزادی جسم شود. شکل‌های زیر مثال‌هایی از سیستم با یک درجه آزادی را نشان می‌دهند

مبانی و مفاهیم پایه

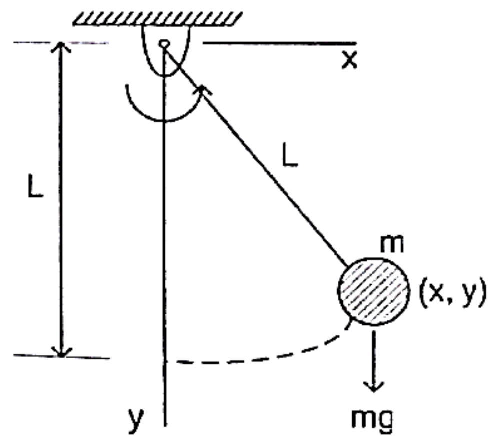
- درجه آزادی



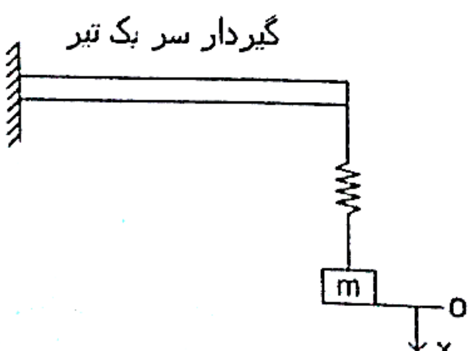
(الف) سیستم جرم- فنر



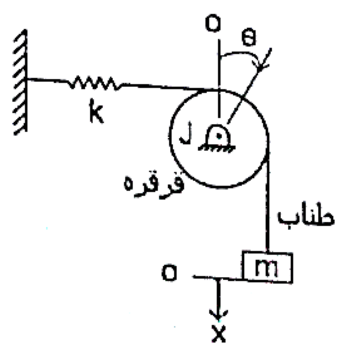
(ب) آونگ پیچشی



(ج) آونگ ساده



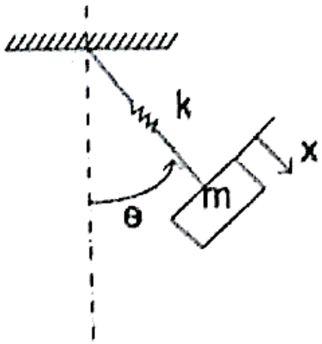
(د) فنر معادل



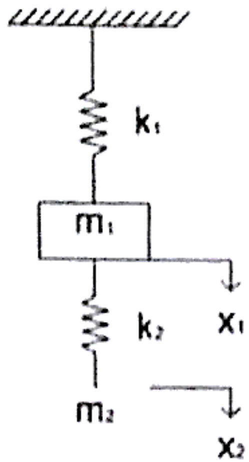
مبانی و مفاهیم پایه

- درجه آزادی

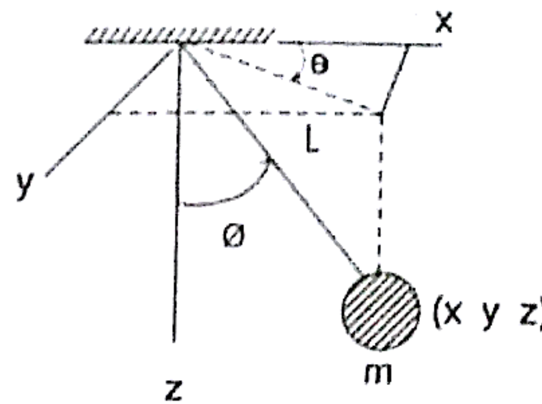
شکل‌های زیر نمونه هایی از سیستم با دو درجه آزادی را نشان می‌دهند:



(الف) سیستم جرم - فنر



(ب) سیستم دو جرم – دو فنر

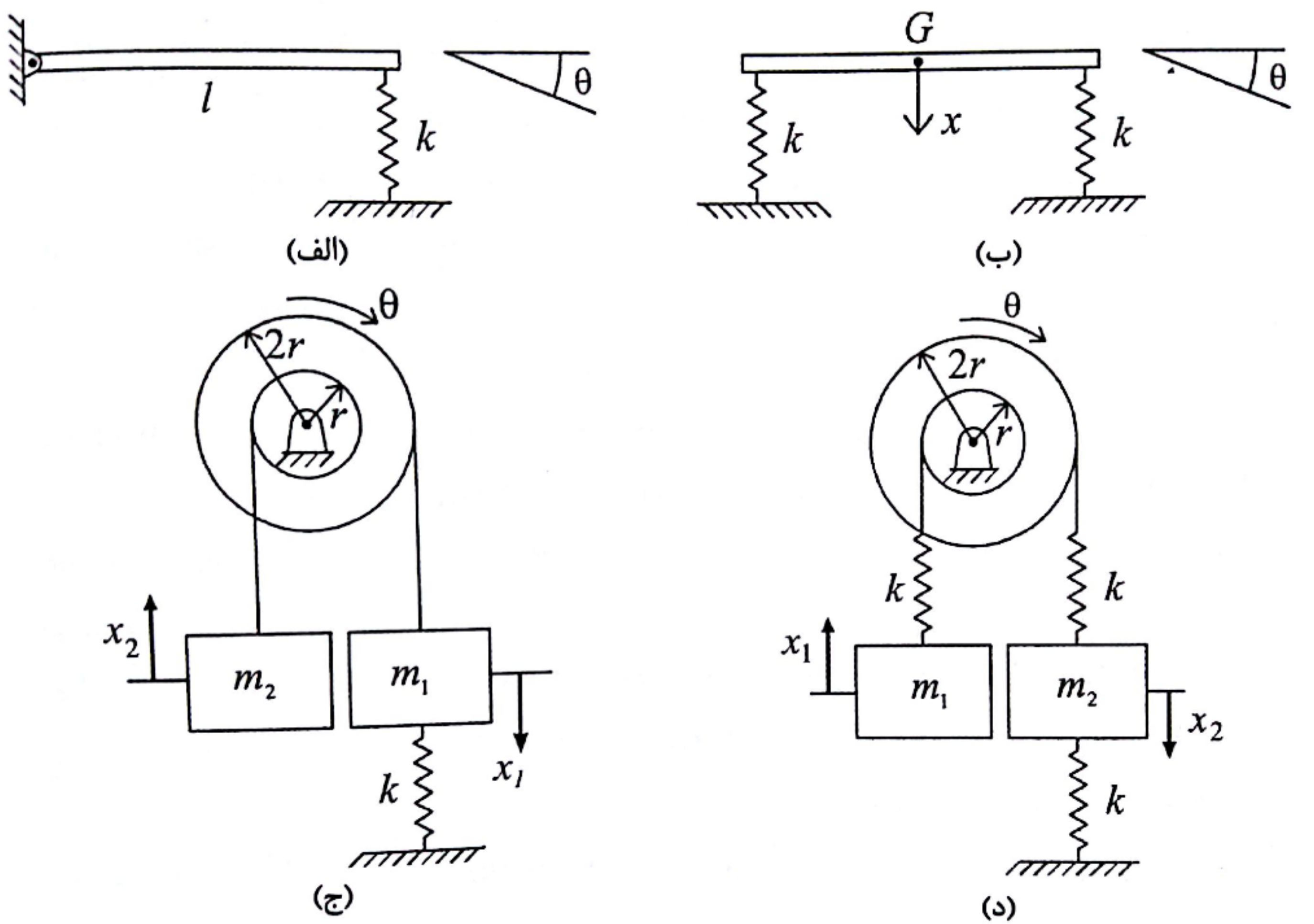


(ج) آونگ کروی

مبانی و مفاهیم پایه

- درجه آزادی
- مثال

۱-۹ درجات آزادی هر کدام از سیستم‌های زیر را که در وضعیت تعادل نشان داده شده‌اند، تعیین کنید.



مبانی و مفاهیم پایه

- درجه آزادی
  - مثال

حل: الف) مختصه θ ایجاد یک درجه آزادی می‌نماید.

ب) مختصه‌های x و θ غیر وابسته‌اند، بنابراین دو درجه آزادی داریم.

ج) مختصه‌های x_1، x_2 و θ به هم وابسته‌اند. بنابراین سیستم یک درجه آزادی است.

د) جابجایی جرم m_1 را اگر x_1 بگیریم، غیر وابسته به θ و x_2 بوده و x_2 و θ نیز غیر وابسته‌اند.
بنابراین سه درجه آزادی داریم.

مبانی و مفاهیم پایه

- مدلسازی گسسته

برای بررسی دینامیک و ارتعاشات تجهیزات و ماشین‌آلات صنعتی، ساختمان‌ها، بدن انسان و ... غالباً سعی می‌شود که مدل‌های ساده‌ای از آنها با استفاده از جرم‌های صلب، فنرها و میراگرها تهیه شود، به گونه‌ای که این مدل‌ها در حد امکان کمترین پیچیدگی را داشته باشند و در عین حال با دقت خوبی رفتار سیستم واقعی را در برابر انواع تحریک‌های خارجی و شرایط اولیه به ما نشان دهند. این نوع از مدلسازی را مدلسازی گسسته می‌نامند. بدیهی است که هرچه مدلسازی انجام شده کامل‌تر باشد، می‌توان اطلاعات بیشتری از آن بدست آورد، اما در همان حال تحلیل این مدل‌ها دشوارتر بوده و بخش زیادی از اطلاعات بدست آمده ممکن است به کار ما نیایند.

- فرایند مدل سازی

۱- اجسامی را که دارای سختی زیادی هستند، به عنوان اجسام صلب مدل می‌کنیم.

۲- اجسام انعطاف پذیر را به عنوان فنرهای الاستیک مدل می‌کنیم.

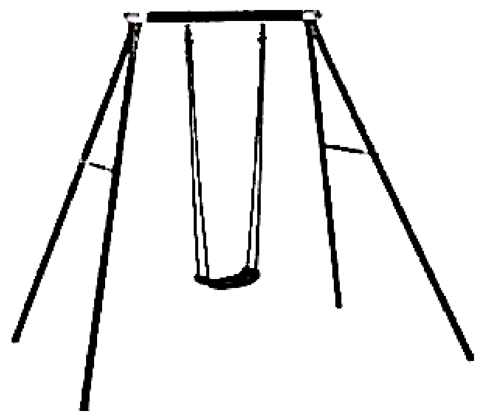
۳- اگر جرم بخش‌های الاستیک در مقایسه با بخش‌های صلب ناچیز باشد، از آن صرفنظر می‌نماییم، در غیر این صورت جرم آنها را به بخش‌های صلب نسبت می‌دهیم.

۴- اگر در درون مجموعه، میراگرهای ویسکوز و اصطکاکی میرایی قابل توجهی را ایجاد نمایند، از میرایی معادل بخش‌های انعطاف‌پذیر (میرایی هیسترزیس یا میرایی سازه‌ای) صرفنظر می‌کنیم.

مبانی و مفاهیم پایه

- مدلسازی گسسته
  - مثال ۱

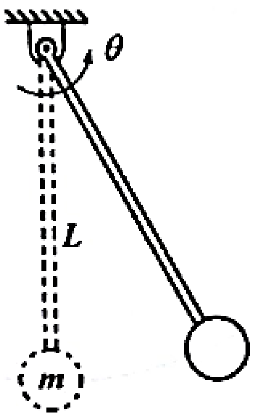
شکل ۲-۲۳ یک تاب معمولی را نشان می‌دهد که در بسیاری از پارک‌ها برای بازی کودکان قرار داده می‌شوند. این وسیله دارای یک اسکلت فولادی بسیار سخت است که برای نگهداری تاب از آن استفاده می‌شود. یک صندلی پلاستیکی نیز با دو رشته زنجیر به تیر عرضی این اسکلت فولادی متصل شده است و در محل اتصال برای کم کردن اصطکاک تکیه گاهی از دو عدد بلبرینگ استفاده شده است.



مبانی و مفاهیم پایه

- مدلسازی گسسته
  - مثال ۱

برای محاسبه‌ی سرعت تاب خوردن کودکی که در حال بازی است، می‌توانیم اسکلت فولادی را به عنوان یک پایه‌ی صلب، زنجیرها را بدون جرم و صندلی را به صورت یک جرم متمرکز تصور کنیم که جرم کودک نیز به جرم صندلی افزوده می‌شود. تمام این مجموعه را می‌توان مطابق شکل ۲-۲۴ به صورت یک آونگ ساده در نظر گرفت که جرم آونگ برابر جرم کودک بعلاوه جرم صندلی است و طول آونگ نیز برابر طول زنجیرهای تاب می‌باشد.



مبانی و مفاهیم پایه

- مدلسازی گسسته
  - مثال ۲

شکل ۲-۲۵ یک پرنده را نشان می‌دهد که بر روی شاخه‌ی نازکی از یک درخت نشسته است. نازک بودن شاخه باعث می‌شود که هنگام فرود آمدن پرنده و یا وزش باد، شاخه شروع به ارتعاش نماید.

مبانی و مفاهیم پایه

- مدلسازی گسسته
  - مثال ۲

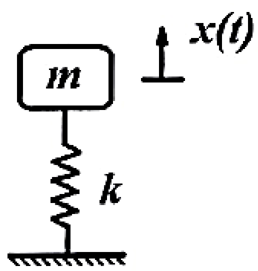
برای محاسبه‌ی فرکانس ارتعاشات صورت گرفته، می‌توانیم تنه‌ی درخت را به دلیل سختی زیاد آن به عنوان یک تکیه گاه صلب در نظر بگیریم و شاخه‌ی نازک آن را به عنوان یک تیر الاستیک مدل نماییم که یک وزنه بر روی آن قرار گرفته است (شکل ۲-۲۶).

شکل ۲-۲۶- مدل کردن شاخه و پرنده
با یک تیر الاستیک که یک جرم متمرکز
بر روی آن قرار گرفته است

مبانی و مفاهیم پایه

- مدلسازی گسسته
  - مثال ۲

اگر وزنه پرنده از وزن شاخه بسیار بیشتر باشد، از جرم شاخه صرفنظر کرده و آن را تنها با یک فنر خطی شبیه‌سازی می‌کنیم. در غیر این صورت باید برای شاخه نیز یک جرم معادل در نظر بگیریم و آن را با جرم پرنده جمع کنیم (در فصل‌های بعد با چگونگی محاسبه جرم معادل آشنا خواهیم شد). در این صورت مدل نهایی، یک مدل یک درجه آزادی به صورت شکل ۲-۲۷ خواهد بود. در این شکل k سختی معادل شاخه و m جرم معادل شاخه و پرنده است.

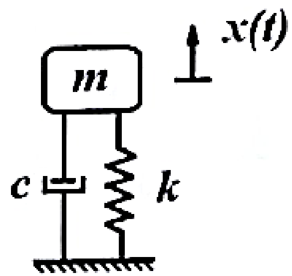


شکل ۲-۲۷- مدل کردن شاخه و پرنده
با یک جرم و فنر

مبانی و مفاهیم پایه

- مدلسازی گسسته
  - مثال ۲

اگر بخواهیم سرعت میرا شدن ارتعاشات را نیز بدست آوریم، باید برای شاخه یک میرایی ویسکوز و یا میرایی هیسترزیس معادل بدست آوریم که با فنر به صورت موازی قرار می‌گیرد (شکل ۲-۲۸).

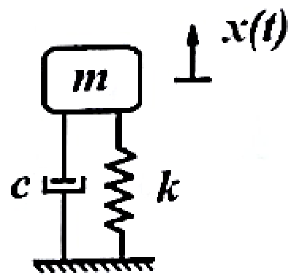


شکل ۲-۲۸- مدل کردن شاخه و پرنده
با یک جرم و فنر و میرا کننده

مبانی و مفاهیم پایه

- مدلسازی گسسته
  - مثال ۲

اگر بخواهیم سرعت میرا شدن ارتعاشات را نیز بدست آوریم، باید برای شاخه یک میرایی ویسکوز و یا میرایی هیسترزیس معادل بدست آوریم که با فنر به صورت موازی قرار می‌گیرد (شکل ۲-۲۸).

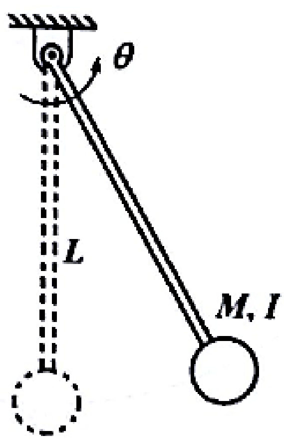


شکل ۲-۲۸- مدل کردن شاخه و پرنده
با یک جرم و فنر و میرا کننده

مبانی و مفاهیم پایه

- مدلسازی گسسته
  - مثال ۳

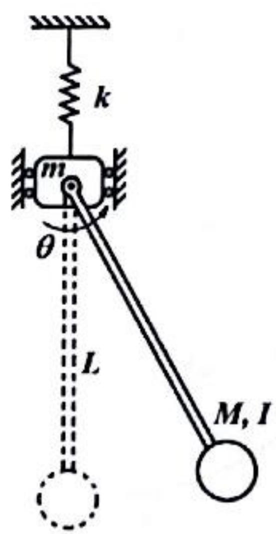
شکل ۲-۲۹ اتاقک مربوط به یک تله کابین را نشان می‌دهد که توسط یک مفصل لولایی به کابل فولادی متصل شده است. اگر نیروی کشش کابل چنان بزرگ باشد که تغییر شکل کابل به سختی صورت گیرد، می‌توان کابین را به صورت یک آونگ مدل کرد که به یک پایه‌ی صلب متصل شده است، مانند شکل ۲-۳۰. در شکل ۲-۳۰ L فاصله‌ی مرکز جرم کابین تا محل اتصال لولایی، M جرم کابین و I گشتاور دوم جرم حول مرکز جرم کابین است.



مبانی و مفاهیم پایه

- مدلسازی گسسته
  - مثال ۳

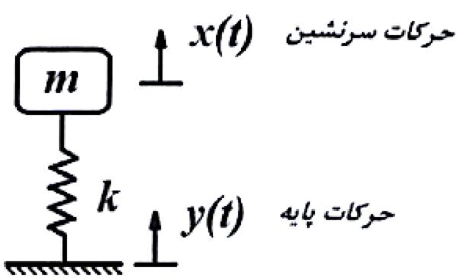
اگر نیروی کشش کابل خیلی بزرگ نباشد، خود کابل نیز می‌تواند دچار تغییر شکل شود و باید برای تغییر شکل آن یک جرم و سختی معادل در نظر گرفت. در این حالت برای بررسی رفتار ارتعاشی مجموعه در حرکات درون صفحه‌ای، می‌توان مطابق شکل ۲-۳۱ مجموعه را با یک آونگ مدلسازی کرد که به یک پایه‌ی متحرک وصل شده است که خود پایه نیز با یک فنر الاستیک به تکیه‌گاه متصل شده است (این نوع پایه را پایه الاستیک می‌نامند). در شکل ۲-۳۱ k و m به ترتیب سختی معادل کابل و جرم مؤثر کابل بعلاوه تکیه‌گاه هستند.



مبانی و مفاهیم پایه

- مدلسازی گسسته
  - مثال ۴

شکل ۲-۳۲ یک غلطک راه‌سازی را نشان می‌دهد که معمولاً در آسفالت معابر مورد استفاده قرار می‌گیرد. دستگاه دارای دو غلطک بسیار سخت فولادی و یک شاسی محکم فولادی است. در محل اتصال غلطک‌ها به شاسی از دو اتصال با ضریب سختی زیاد استفاده شده است که باعث می‌شود انعطاف‌پذیری مجموعه بسیار کم باشد. یک صندلی نیز بر روی شاسی قرار گرفته است که محل نشستن راننده است. برای آنکه ارتعاشات کمتری به سرنشین منتقل شود، اتصال صندلی به شاسی توسط یک فنر نسبتاً انعطاف‌پذیر صورت گرفته است. برای مدلسازی این مجموعه ساده‌ترین روش آن است که مجموعه‌ی غلطک‌ها و شاسی را کاملاً صلب در نظر بگیریم و فرض کنیم این مجموعه همواره در تماس با جاده است و همراه با جاده نوسان می‌کند (پایه متحرک است) و سرنشین و صندلی را نیز به عنوان یک جرم صلب در نظر بگیریم که بر روی یک فنر خطی قرار گرفته است (شکل ۲-۳۳).

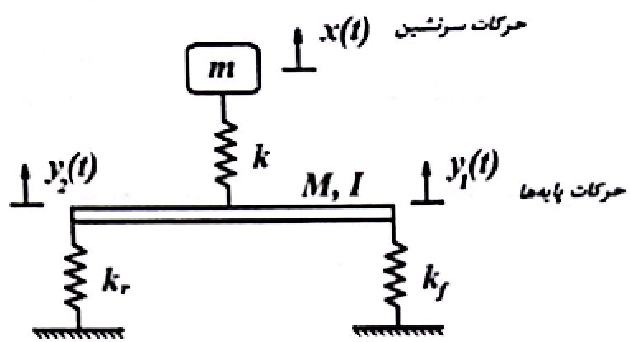


مبانی و مفاهیم پایه

- مدلسازی گسسته
  - مثال ۴

در صورتی که سختی اتصالات شاسی و غلطک‌ها قابل صرفنظر نباشد، می‌توانیم شاسی را به عنوان یک تیر صلب در نظر بگیریم که توسط فنر الاستیک به دو پایه‌ی متحرک (غلطک‌ها) متصل شده است (شکل ۲-۳۴). در شکل ۲-۳۴ M و I به ترتیب جرم شاسی و گشتاور دوم جرم حول مرکز جرم هستند و k_f و k_r نیز سختی معادل اتصالات شاسی و غلطک‌ها در جلو و عقب دستگاه می‌باشند.

بدیهی است که در شکل ۲-۳۴ حرکات پایه جلو و عقب دستگاه مستقل از هم نیستند و مشابه همدیگر می‌باشند و تنها یک اختلاف زمانی با همدیگر دارند.



مبانی و مفاهیم پایه

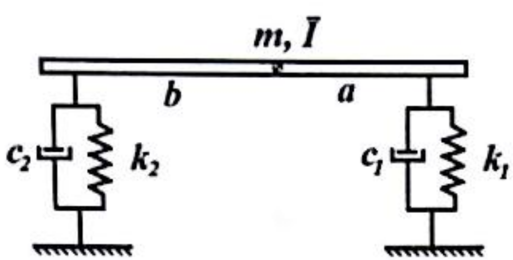
- مدلسازی گسسته
  - مثال ۵

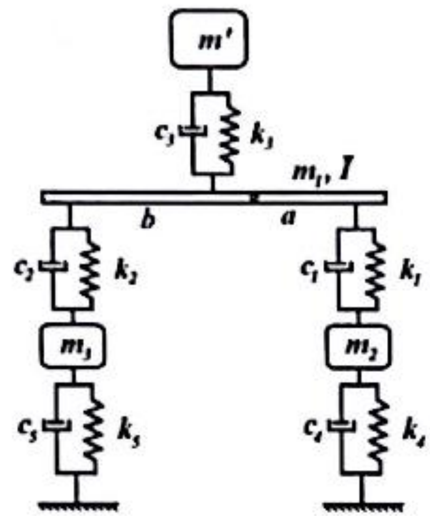
شکل ۲-۳۵ یک موتور سیکلت را نشان می‌دهد که چرخ‌های آن توسط دو فنر و کمک فنر به شاسی اصلی وصل شده‌اند. شاسی اصلی دارای سختی بسیار زیادی است و می‌توان آن را به صورت یک جسم صلب مدلسازی کرد.

مبانی و مفاهیم پایه

- مدلسازی گسسته
  - مثال ۵

اگر تایرهای موتور با فشار باد بسیار زیادی پر شده باشند، تایرها بسیار سخت می‌شوند و با فرض اینکه تایرها همواره با سطح جاده در تماس باشند، می‌توان آنها را به عنوان دو تکیه‌گاه متحرک شبیه‌سازی کرد که حرکات خود را از جاده می‌گیرند و در صورت حرکت بر روی یک جاده کاملاً صاف دارای هیچگونه حرکتی نیستند. در این صورت مجوعه را می‌توان با فرض صلب بودن صندلی به صورت شکل ۲-۳۶ شبیه‌سازی کرد که در آن M و I به ترتیب جرم شاسی بعلاوه سرنشین و گشتاور دوم جرم حول مرکز جرم هستند و k_1 و k_2 نیز ضریب سختی فنرهای جلو و عقب و c_1 و c_2 ضریب میرایی کمک فنرهای جلو و عقب می‌باشند. اگر صندلی نیز در مقایسه با فنرها دارای نرمی قابل توجهی باشد و تایرها نیز کم باد و انعطاف پذیر باشند، باید از مدلی مطابق شکل ۲-۳۷ استفاده کنیم.

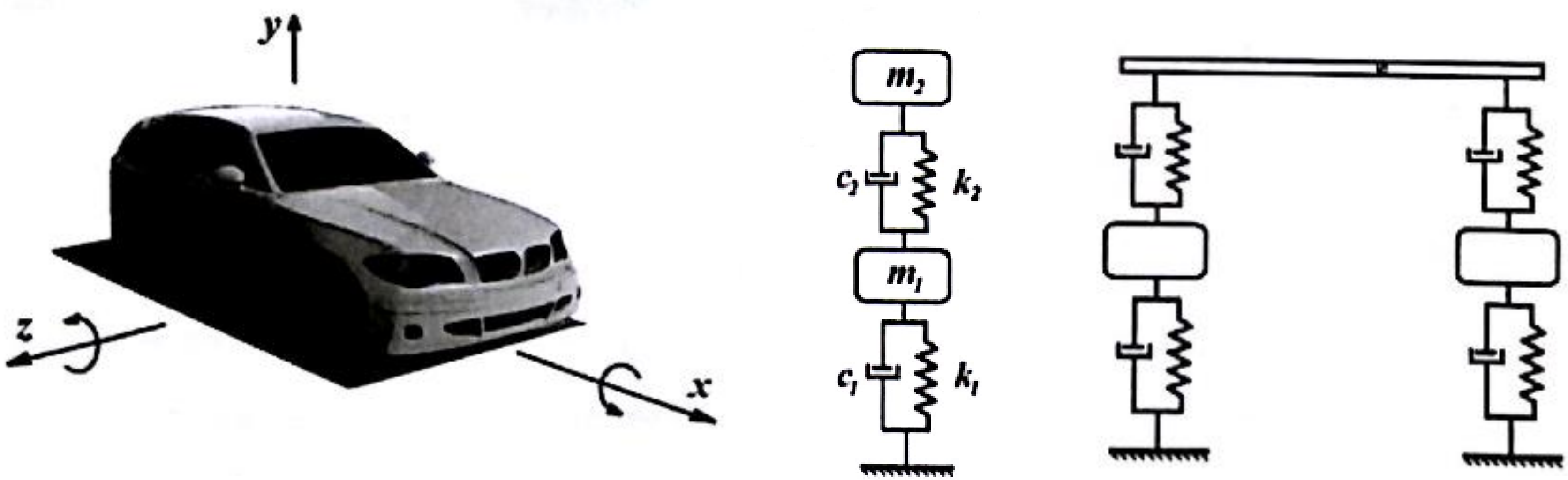




مبانی و مفاهیم پایه

- مدلسازی گسسته
  - مثال ۶

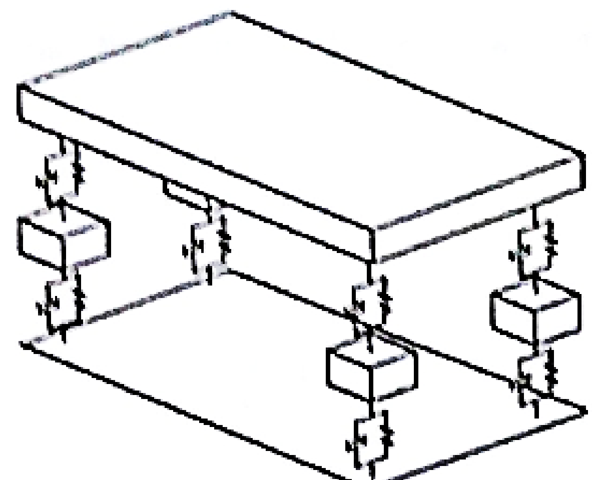
در شکل ۲-۳۸ یک خودروی سواری نشان داده شده است. برای تحلیل دینامیکی این خودرو از مدل‌های بسیار متفاوتی استفاده می‌شود که هر یک به منظور خاصی به کار برده می‌شوند.



مبانی و مفاهیم پایه

- مدلسازی گسسته
  - مثال ۶

شکل ۲-۴۱ نیز مدل هفت درجه آزادی خودرو را نشان می‌دهد که معمولاً به عنوان مدل کامل‌تر در طراحی اولیه دینامیک خودرو مورد استفاده قرار می‌گیرد. در تمام مدل‌های معرفی شده شاسی به صورت صلب و تایرها به صورت انعطاف‌پذیر در نظر گرفته شده‌اند. برای خودروهای سنگین مانند اتوبوس‌ها، کامیون‌ها و ... چون شاسی دارای طول زیادی است و به دلیل محدودیت وزن نمی‌توان آن را به صورت خیلی سختی تولید نمود، شاسی خودرو نیز به صورت یک تیر انعطاف‌پذیر مدلسازی می‌شود. مدل‌هایی که در اینجا معرفی شدند صرفاً در طراحی اولیه‌ی خودرو استفاده می‌شوند و تنها حرکات کلی خودرو در جاده را شبیه‌سازی می‌کنند. بدیهی است که برای بررسی رفتار جزئی بخش‌های مختلف خودرو، مانند ارتعاشات بدنه‌ی خودرو (درها، پنجره ها و ...) نیازمند مدل‌های پیچیده‌تری هستیم که در بحث حاضر نمی‌گنجد.



مبانی و مفاهیم پایه

- مدلسازی گسسته
  - مثال ۷

شکل ۲-۴۲ نمایی از یک ساختمان دو طبقه را نشان می‌دهد. این ساختمان دارای اسکلت فولادی و سقف‌های یکپارچه بتن‌ریزی شده است و دیوارهای آن در مقایسه با وزن سقف‌ها کوچک است. برای بررسی رفتار کلی این سازه در مقابل یک زلزله احتمالی، می‌توان از جرم دیوارها در مقابل جرم سقف‌ها صرفنظر نمود و یا آنکه جرم دیوارها را به سقف ها منتقل کرد. از طرفی می‌دانیم که جرم ستون‌های فولادی نیز در مقایسه با جرم کلی ساختمان کوچک است. در نتیجه می‌توان ستون‌های فولادی را مانند تیرهای انعطاف‌پذیری مدل کرد که در مقابل تغییر شکل عرضی و یا طولی ساختمان از خود یک سختی نشان می‌دهند. شکل ۲-۴۳ یک مدل ساده شده از ساختمان را در برابر امواج عرضی زمین لرزه نشان می‌دهد. چنانکه در این شکل نشان داده شده است، سقف‌های طبقات مختلف مانند جرم‌های صلبی مدل شده‌اند که می‌توانند در راستای عرضی نسبت به زمین جابجا شوند و ستون‌ها نیز مانند تیرهای انعطاف‌پذیر دچار تغییر شکل شده و یک سختی جانبی ایجاد می‌نمایند.