آرایه‌ها Array

آرایـه نوعی ساختمان داده است که عناصر آن هم نوع بوده و هر یک از عناصر با یک اندیس به صورت مسـتقیم قابـل دسـتیابی اسـت. آرایـه مـی‌تواند یک بعدی , دو بعدی و یا چند بعدی باشد. آرایه‌های دو بعدی را با نام ماتریس می‌شناسیم.

$[L_1 \ldots U_1 , L_2 \ldots U_2 , L_n \ldots U_n]$

Array $[L \ldots U]$ of items

تعداد عناصر آرایه $= U - L + 1$

تعداد عناصر آرایه n بعدی $= [U_1 - L_1 + 1][U_2 - L_2 + 1][U_n - L_n + 1]$

فضای اشغال شده توسط آرایه (فضای مورد نیاز) $= (U - L + 1) \times n$

مـثال : در یـک آرایـه بـه نام Float [200] اگر آدرس شروع آرایه در حافظه 1000 باشد A25 در کدام آدرس قرار دارد.

$A[i] = (i - L) \times n + \alpha$

محل عنصر iام در حافظه $= (25 - 0) \times 4 + 1000 = 1100$

آرایه‌های دوبعدی یا ماتریس‌ها به دو روش در حافظه ذخیره می‌شوند.

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad 3\times 2$$

۱. روش سطری Row Major

سطری

0	1	2	3	4	5
2	5	1	6	3	4

۲. روش ستونی Column Major

ستونی

0	1	2	3	4	5
2	1	3	5	6	4

A : Array $[L_1 \ldots U_1 , L_2 \ldots U_2]$ of items

تعداد عناصری $= [U_1 - L_1 + 1][U_1 - L_2 + 1]$

آدرس $A[i , j]$ در روش سطری $= [(i - L_1) \times (U_2 - L_2 + 1) + (j - L_2)] \times n + \alpha$

آدرس $A[i , j]$ در روش ستونی $= [(j - L_2) \times (U_1 - L_1 + 1) + (i - L_1)] \times n + \alpha$

مثال : طبق آرایه زیر , آدرس‌های خواسته شده را محاسبه نمائید.

$$A : \overset{L_1 \dots U_1 \;\; L_2 \dots U_2}{[1 \dots 3 , 1 \dots 2]} \Longrightarrow$$

در زبان C داریم $\Longrightarrow A[3][2]$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

روش سطری $A [3 , 2] = (3 - 1) \times (2 - 1 + 1) + (2 - 1) = 2 \times 2 + 1 = 5$

روش ستونی $A [3 , 2] = (2 - 1) \times (3 - 1 + 1) + (3 - 1) = 1 \times 3 + 2 = 5$

روش سطری $A [1 , 2] = (1 - 1) \times (2 - 1 + 1) + (2 - 1) = 1$

روش ستونی $A [1 , 2] = (2 - 1) \times (3 - 1 + 1) + (1 - 1) = 3$

تمرین : در یک آرایه به شکل A [1 ... 100 , 1 ... 26] of integer اگر این آرایه از محل 1000 حافظـه شروع شده باشد محل داده A [60 , 6] در روش سطری و محل داده A [20 , 4] در روش ستونی کدام آدرس حافظه است.

$$A [60 , 6] = (60 - 1) \times (26 - 1 + 1) + (6 - 1) \times 2 + 1000 = 4078$$

$$A [20 , 4] = (4 - 1) \times (100 - 1 + 1) + (20 - 1) \times 2 + 1000 = 1638$$

در آرایـه‌هـای دو بعـدی مربعی یا ماتریس‌های مربعی که کلیه عناصر بالای قطر اصلی آن صفر باشند یـک ماتریس پایین مثلثی تشکیل می‌گردد و برعکس اگر کلیه عناصر پایین قطر اصلی آن صفر باشند یـک ماتـریس بـالا مثلثـی تشـکیل خـواهد شـد. در یـک ماتـریس پایین مثلثی یا بالا مثلثی حداکثر $\frac{n(n+1)}{2}$ عنصر غیر صفر داریم که n اندازه هر بعد ماتریس است.

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$ بالا مثلثی

حداکثر عناصر غیر صفر $= \frac{3(3+1)}{2} = 6$

ماتریس بالا مثلثی $A [i , j] = 0 \qquad i > j \Longrightarrow$

ماتریس پایین مثلثی $A [i , j] = 0 \qquad i < j \Longrightarrow$

اگـر انـدازه ابعـاد ماتریس‌های مثلثی افزایش یابند این ماتریس‌ها حاوی تعداد زیادی صفر خواهند بود کـه ذخیـره کردن سطری یا ستونی ماتریس به طور کامل در حافظه باعث هدر رفتن بخشی از فضای حافظـه مـی‌گردد. به همین دلیل ماتریس‌های مثلثی را بصورت سطری یا ستونی بدون در نظر گرفتن صفرها در حافظه ذخیره می‌کنند.

پایین مثلثی =====> سطری $\frac{(i-1)\times i}{2}+j$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

پایین مثلثی

1	2	3	4	5	6
1	2	5	3	1	1

بالا مثلثی =====> ستونی $\frac{(j-1)\times j}{2}+i$

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

بالا مثلثی

1	2	3	4	5	6
1	6	2	7	5	4

جمع ماتریس‌ها

در جمــع دو ماتریس , حتماً باید یک ماتریس $m\times n$ با یک ماتریس $m\times n$ جمع شده و نتیجه نیز یک ماتریس $m\times n$ خواهد شد. در این عملیات عناصر دو آرایه نظیر به نظیر با یکدیگر جمع خواهند شد.

$$A_{m\times n}+B_{m\times n}=C_{m\times n}$$

for (i = 0 , i < m , + + i)

for (j = 0 , j < n , + + j)

$C_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$

ضرب ماتریس‌ها

در عمــل ضــرب , یــک ماتــریس A_{mL} و یک ماتریس B_{Ln} با یکدیگر ضرب شده و ماتریس بدست آمده نیز دارای سطر و ستونهایی می‌باشد که سطر ماتریس بدست آمده با تعداد سطرهای ماتریس اول و ستون ماتریس بدست آمده با تعداد ستونهای ماتریس دوم برابر است.

$$C_{mn}=A_{\frac{m}{i}\frac{L}{k}}\times B_{\frac{L}{k}\frac{n}{i}}$$

$$\begin{bmatrix}3&4&1&2\\2&5&3&1\\1&0&2&1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&2\\0&1\\1&1\\3&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-&-\\-&-\\-&-\end{bmatrix}$$

$$3\times 4 \qquad \times \qquad 4\times 2 \quad = \quad 3\times 2$$

for (i = 0 , i < m , + + i)

for (j = 0 , j < n , + + j)

{

$C_{ij}=0$

for (k = 0 , k < L , + + k)

$C_{ij}=a_{ik}\times b_{kj}+C_{ij}$

}

تمرین : مقدار [0, 1] C را در حاصلضرب دو ماتریس مثال قبل بدست آورید.

جــواب : برای بدست آوردن مقدار خواسته شده باید حلقه‌های for بالا را Trace کنیم. پس بنابراین داریم :

$$C_{ij} = 0$$

$$C_{ij} = a_{ik} \times b_{kj} + C_{ij}$$

$$C_{ij} = 2 \times 1 + 0 = 2$$

$$C_{ij} = 5 \times 0 + 2 = 2$$

$$C_{ij} = 3 \times 1 + 2 = 5$$

$$C_{ij} = 1 \times 3 + 5 = 8$$

i	j	k	L	C_{ij}
1	0	0	4	0
		1		2
		2		2
		3		5
				8

ترانهاده

برای اینکه ترانهاده یک ماتریس را بدست آوریم جای سطرها و ستونهای ماتریس عوض می‌شوند.

$$A\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow A^T\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

$A_{m \times n}$

```
for (i = 0 , i < m , + + i)
for (j = 0 , j < n , + + j)
A [j] [i] = A [i] [j]
```