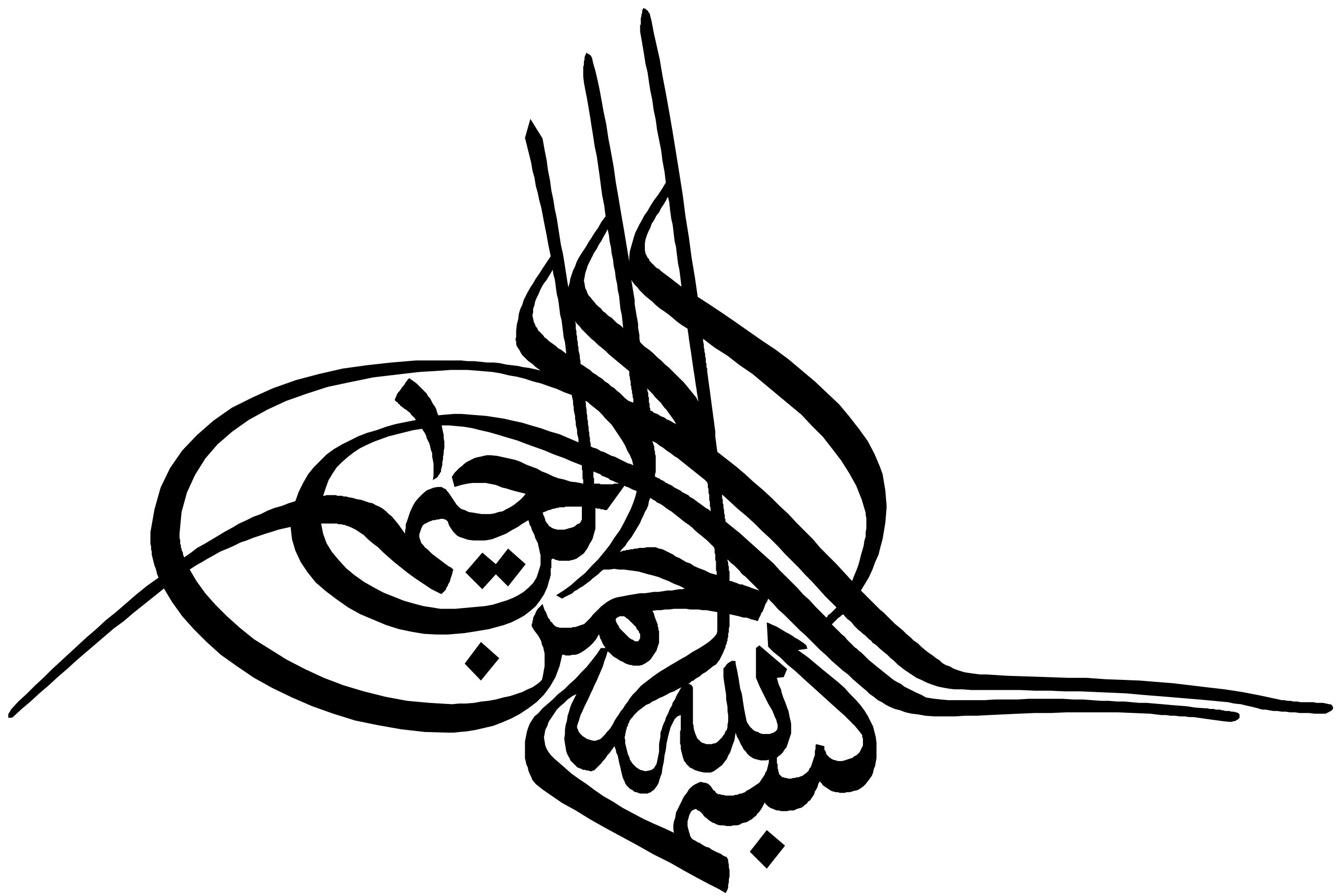

بسم الله الرحمن الرحيم

ریاضیات مهندسی

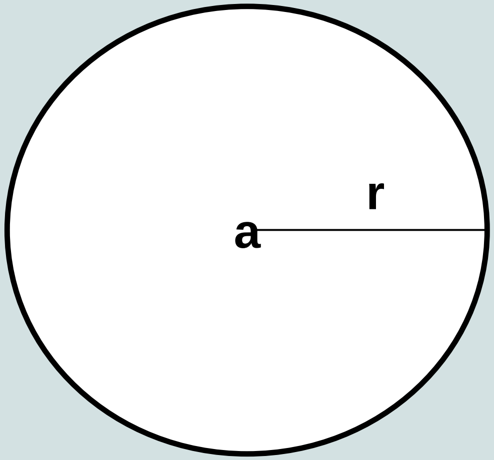
دانشگاه فنی و حرفه ای

دکتر داود اسداللهی

مکان هندسی

دانشگاه فنی و حرفه ای

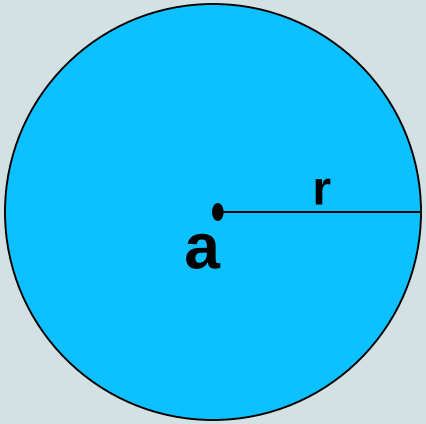
قبلا اشاره شد که $|z-a|$ همان فاصله نقطه z از a می باشـد.
پس مکان هندسی $|z-a|=r$ دایره ای به مرکز a و شعاع r خواهد بود.



مکان هندسی

دانشگاه فنی و حرفه‌ای

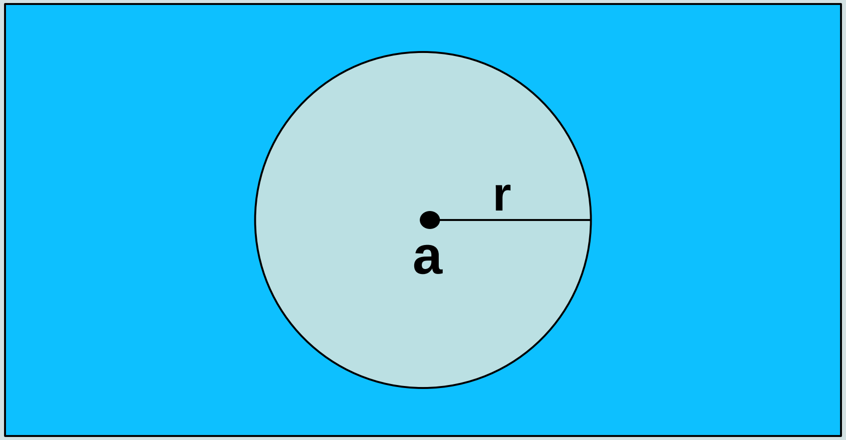
پس مکان هندسی $|z-a|<r$ داخل دایره‌ای به مرکز a و شعاع r است.



دانشگاه فنی و حرفه‌ای

مکان هندسی

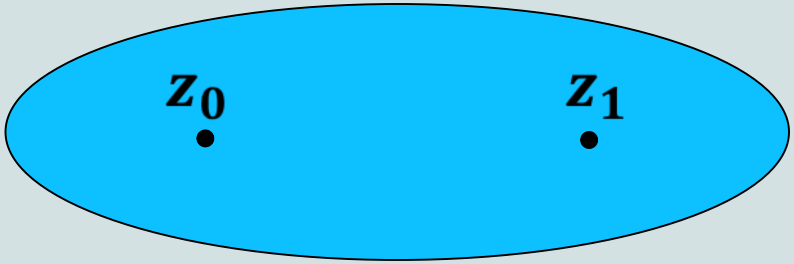
و مکان هندسی $|z-a|>r$ خارج دایره‌ای بــه مرکــز a و شعاع r است.



دانشگاه فنی و حرفه‌ای

مکان هندسی

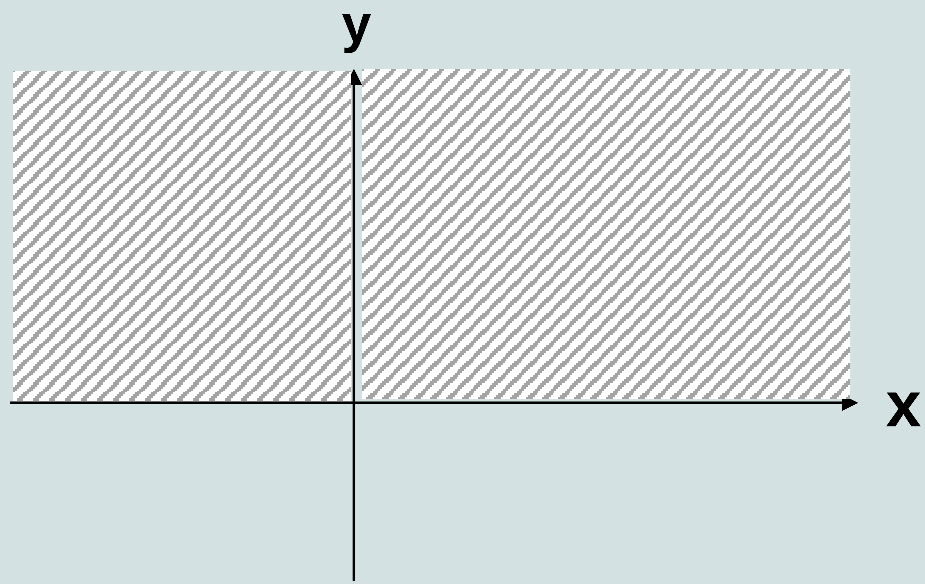
مکان هندسی $|z - z_0| + |z - z_1| = 1$ روی بیضی به کانون‌های z_0 و z_1 است. چون نقاطی که مجموع فاصله‌های آن‌ها از z_0 و z_1 برابر مقدار ثابتی است، نقاط روی بیضی خواهند بود.



مکان هندسی

دانشگاه فنی و حرفه‌ای

مکان هندسه $Im\ z > 0$ نیم صفحه بالای محور x ها است.



مکان هندسی

مکان هندسی $Re\,z < 0$ به صورت زیر است.

مساله

دانشگاه فنی و حرفه ای

مکان هندسی موارد زیر را حساب کنید.

1. $Re\, z \geq -1$

2. $-\pi < Im\, z < \pi$

3. $0 < Arg\, z < \frac{\pi}{4}$

توابع مختلط

دانشگاه فنی و حرفه‌ای

تابع مختلط f تابعی است که به ازاء هـر عـدد مخـتلط z مقـدار مختلط f(z) را نظیر می‌کند. با قرار دادن

$$z = x + iy$$

می توان f(z) را به صورت استاندارد

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

نوشت.

دانشگاه فنی و حرفه ای

توابع مختلط

تابع مختلط f تابعی است که به ازاء هـر عـدد مخـتلط z مقـدار مختلط f(z) را نظیر می‌کند. با قرار دادن

$$z = x + iy$$

می توان f(z) را به صورت استاندارد

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

نوشت.

مثال ۱

برای تابع $f(z) = z^2$ داریم:

$$f(z) = f(x + iy) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i(2xy)$$

پس

$$u(x, y) = x^2 - y^2$$

$$v(x, y) = 2xy$$

مثال ۲

دانشگاه فنی و حرفه ای

برای تابع $f(z) = iz$ داریم:

$$f(z) = f(x + iy) = i(x + iy) = -y + ix$$

پس

$$u(x, y) = -y$$

$$v(x, y) = x$$

مثال ۳

برای تابع $f(z) = z\bar{z}$ داریم:

$$f(z) = f(x+iy) = (x+iy)(\overline{x+iy}) = (x+iy)(x-iy)$$

$$= x^2 + y^2$$

پس

$$u(x,y) = x^2 + y^2$$

$$v(x,y) = 0$$

حد تابع مختلط

دانشگاه فنی و حرفه ای

برای تابع $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ و $z_0 = x_0 + iy_0$ و

$w_0 = u_0 + v_0$ در اینصورت

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

هر گاه

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) = u_0$$

$$\lim_{z \to z_0} v(x,y) = v_0$$

پیوستگی توابع مختلط

دانشگاه فنی و حرفه ای

تـــابع $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ را در $z_0 = x_0 + iy_0$ پیوســـته می نامیم هر گاه

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

به طور معادل u و v در (x_0,y_0) هر دو پیوسته باشند.

مشتق توابع مختلط

دانشگاه فنی و حرفه ای

تابع $f(z)$ را در z_0 مشتق پذیر می نامیم هر گاه

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

موجود باشد. در صورت وجود حد فوق را با $f'(z)$ نشان می‌دهیم.

قضیه معادلات کوشی ریمن

دانشگاه فنی و حرفه ای

تابع $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ در $z_0 = x_0 + iy_0$ مشتق‌پذیر است اگر و فقط اگر u و v درمعادلات کوشی ریمن به صورت زیـر صدق کنند.

معادلات کوشی ریمن

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

یا

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

قضیه معادلات کوشی ریمن

دانشگاه فنی و حرفه ای

در اینصورت داریم:

$$f'(z_0) = u_x + iv_x$$

یا

$$f'(z_0) = v_y - iu_y$$

مثال ۱

دانشگاه فنی و حرفه‌ای

تابع $f(z) = z^2$ در همه نقاط مشتق‌پذیر است زیرا

$$u(x, y) = x^2 - y^2$$

$$v(x, y) = 2xy$$

و لذا

$$u_x = 2x = v_y$$

$$u_y = -2y = -v_x$$

مثال ۲

دانشگاه فنی و حرفه‌ای

تابع $f(z) = iz$ در همه نقاط مشتق‌پذیر است زیرا

$$u(x, y) = -y$$

$$v(x, y) = x$$

و لذا

$$u_x = 0 = v_y$$

$$u_y = -1 = -v_x$$

مثال ۳

دانشگاه فنی و حرفه‌ای

در تابع $f(z) = z\bar{z}$ داریم:

$$v(x,y) = 0 \qquad u(x,y) = x^2 + y^2$$

و

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

پس فقط در نقطه صفر مشتق‌پذیر است.

دانشگاه فنی و حرفه‌ای

مثال ۴

در تابع $f(z)=\frac{1}{z}$ داریم:

$$f(z)=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

$$v(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$u(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\begin{cases} u_x=v_y \\ u_y=-v_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ همه جا به جزصفر مشتق‌پذیر است