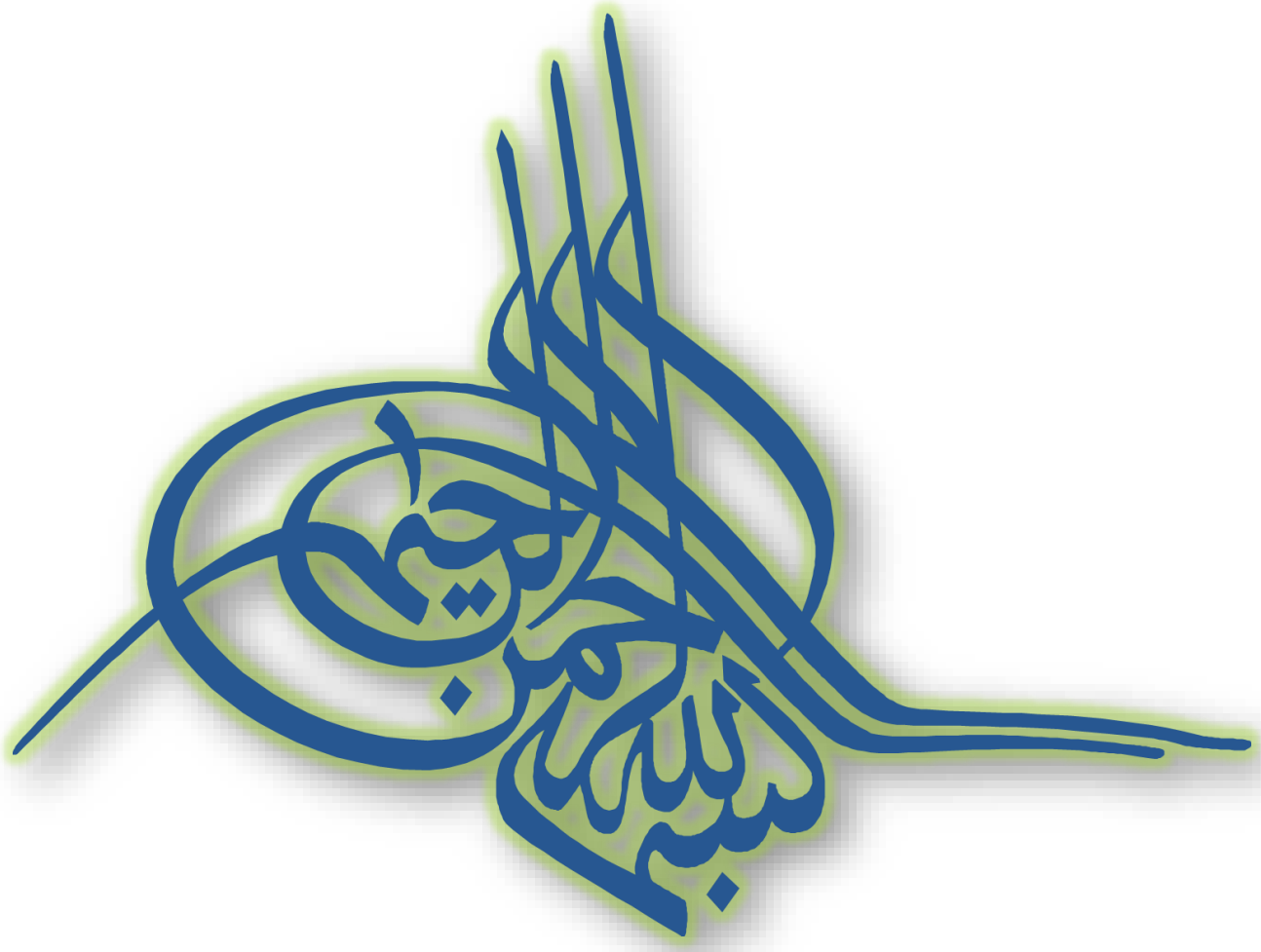
دانشگاه فنی و حرفه‌ای استان آذربایجان شرقی
East Azarbaijan University of Technical & Vocational

دینامیک

جلسه سوم

مدرس:
دکتر علیرضا بابائی

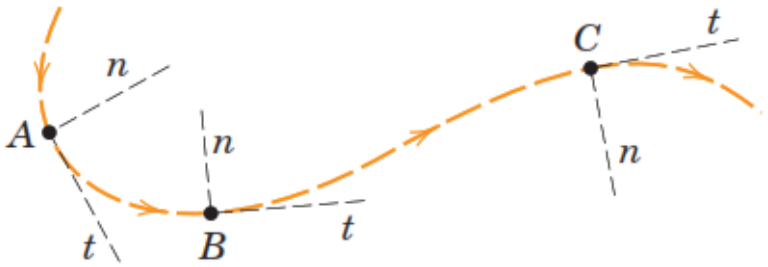
آموزشکده فنی شماره ۲ تبریز


بسم الله الرحمن الرحیم

سینماتیک ذرات

- حرکت منحنی الخط در صفحه:
  - مختصات عمودی و مماسی (n و t)

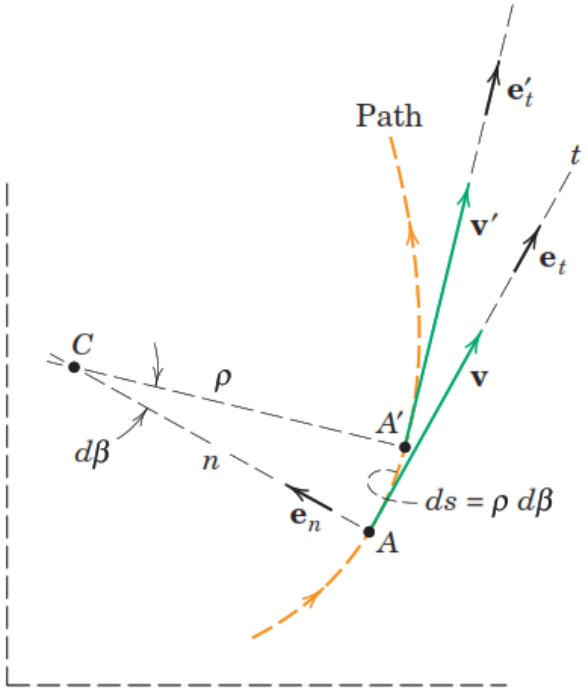
همانطور که در بخش ۱-۲ ذکر شد، یکی از متعارف‌ترین روشهای تشریح حرکت منحنی الخط، استفاده از متغیرهای مسیر است که در امتدادهای مماس t و عمود n بر مسیر ذره اندازه گرفته می‌شود. این مختصات توصیفی طبیعی از حرکت منحنی الخط را ارائه داده و غالباً مناسبترین دستگاه مختصاتی است که مورد استفاده قرار می‌گیرد. همانطور که در شکل ۹-۲ مشاهده می‌شود، مختصات n و t در امتداد مسیر حرکت با ذره از A به B و به C پیش رفته است. جهت مثبت n در تمام وضعیتها همیشه به طرف مرکز انحنای مسیر می‌باشد. همانطور که در شکل ۹-۲ مشاهده می‌گردد، اگر جهت انحنا تغییر کند، جهت مثبت n از یک سوی منحنی به سوی دیگر آن منتقل می‌گردد.



سینماتیک ذرات

- حرکت منحنی الخط در صفحه:
  - مختصات عمودی و مماسی

اکنون، مختصات n و t را برای تشریح سرعت $\mathbf{v}$ و شتاب $\mathbf{a}$ که در بخش ۳-۲ برای حرکت منحنی الخط یک ذره تعریف شدند، مورد استفاده قرار خواهیم داد. برای این منظور، بردارهای یکه $\mathbf{e}_n$ در امتداد n و $\mathbf{e}_t$ در امتداد t را، همانند شکل ۱۰a-۲ برای موقعیت ذره در نقطه A از مسیرش تعریف می‌کنیم.



سرعت

$$\mathbf{v} = v\mathbf{e}_t = \rho\dot{\beta}\mathbf{e}_t$$

شتاب

$$\mathbf{a} = \frac{v^2}{\rho}\mathbf{e}_n + \dot{v}\mathbf{e}_t$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \rho\dot{\beta}^2 = v\dot{\beta}$$

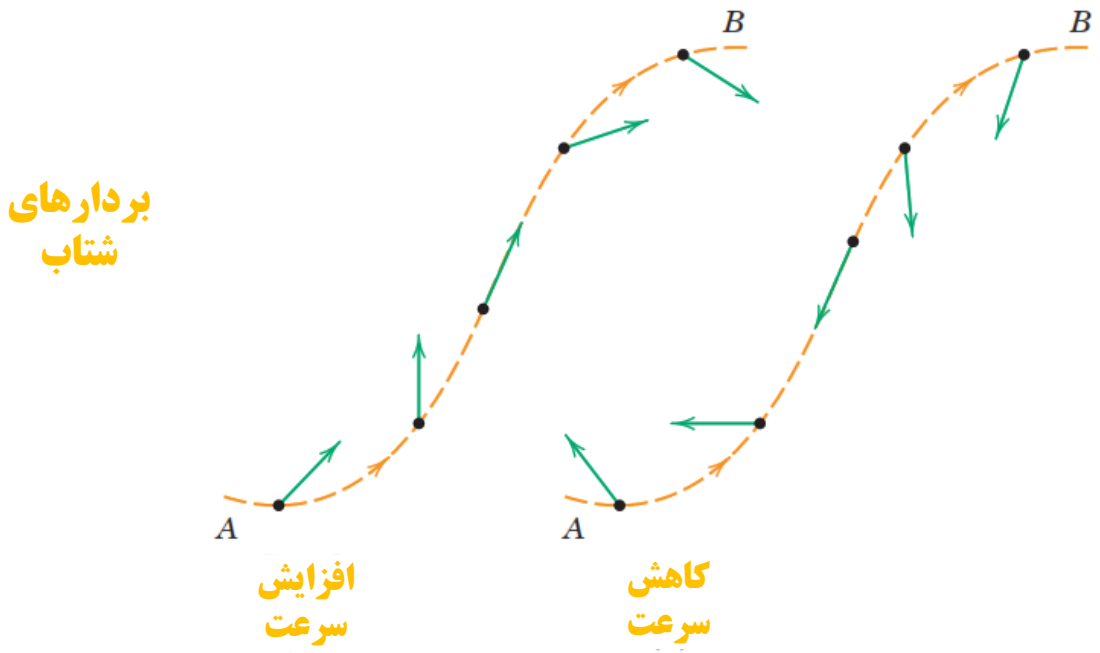
$$a_t = \dot{v} = \ddot{s}$$

$$a = \sqrt{{a_n}^2 + {a_t}^2}$$

سینماتیک ذرات

- حرکت منحنی الخط در صفحه:
  - مختصات عمودی و مماسی

این نکته دارای اهمیت زیادی است که مولفه عمودی شتاب یعنی a_n همیشه به طرف مرکز انحنای مسیر یعنی C متوجه است. از طرف دیگر، مولفه مماسی شتاب در صورتی در امتداد مثبت t می‌باشد که مقدار سرعت v افزایش یافته و در صورتی در امتداد منفی t است که مقدار سرعت کاهش یابد.

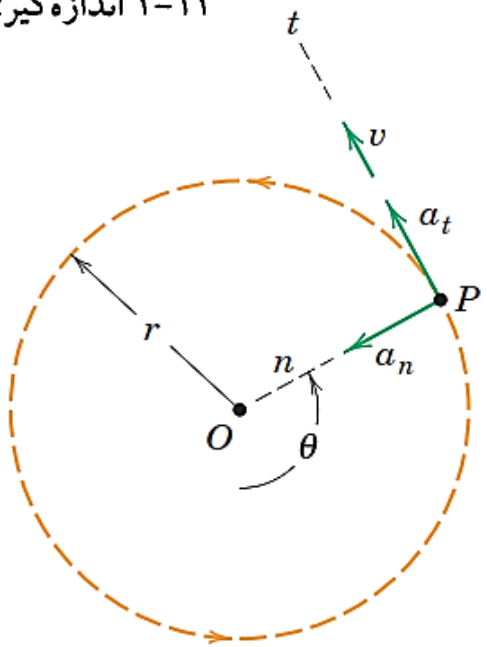


سینماتیک ذرات

- حرکت منحنی الخط در صفحه:
  - مختصات عمودی و مماسی
    - حرکت دایره ای

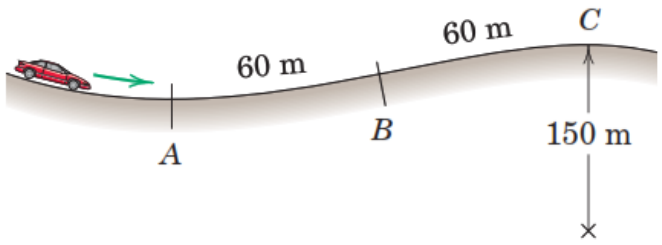
حرکت دایره‌ای حالت خاصی از حرکت منحنی الخط در صفحه است که در آن شعاع انحنای ρ ثابت بوده و برابر شعاع r دایره حرکت می‌باشد و زاویه θ جای زاویه β را می‌گیرد که نسبت به یک مرجع شعاعی مناسب OP، مانند شکل ۲-۱۲ اندازه‌گیری می‌شود. مولفه‌های سرعت و شتاب عبارت خواهند بود از:

$$v = r\dot{\theta}$$
$$a_n = v^2/r = r\dot{\theta}^2 = v\dot{\theta}$$
$$a_t = \dot{v} = r\ddot{\theta}$$



سینماتیک ذرات

- حرکت منحنی الخط در صفحه:



- راننده یک اتومبیل در هنگام رسیدن به جاده ناهموار، ترمز گرفته و با شتاب کند شونده‌ای به حرکت ادامه می‌دهد. سرعتش در فرو رفتگی A برابر ۱۰۰ km/h و در برآمدگی C برابر ۵۰ km/h می‌باشد و در این فاصله ۱۲۰ m را از نقطه A روی جاده طی می‌کند. اگر شتاب کل وارد بر سرنشینان ۳ m/s^2 در نقطه A بوده و اگر شعاع انحنا در نقطه برآمدگی C برابر ۱۵۰ m باشد، (a) شعاع انحنای ρ را در نقطه A، (b) شتاب در نقطه عطف B و (c) شتاب کل در C را محاسبه کنید.

حل: ابعاد اتومبیل در مقایسه با مسیر کوچک بوده، بنابراین اتومبیل را می‌توان به صورت یک ذره در نظر گرفت. سرعتها عبارتند از:

$$v_A = \left(100\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)\left(\frac{1\,\text{h}}{3600\,\text{s}}\right)\left(1000\frac{\text{m}}{\text{km}}\right) = 27.8\ \text{m/s}$$

$$v_C = 50\frac{1000}{3600} = 13.89\ \text{m/s}$$

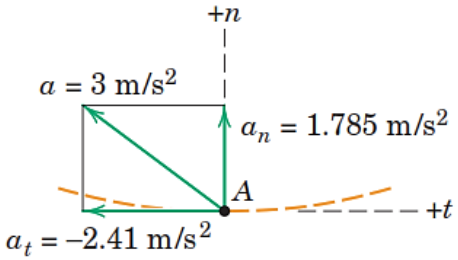
حال شتاب ثابت کند شونده روی مسیر را پیدا می‌کنیم.

$$\left[\int v\,dv = \int a_t\,ds\right] \qquad \int_{v_A}^{v_C} v\,dv = a_t\int_0^s ds$$

$$a_t = \frac{1}{2s}\left(v_C^2 - v_A^2\right) = \frac{(13.89)^2 - (27.8)^2}{2(120)} = -2.41\ \text{m/s}^2$$

سینماتیک ذرات

- حرکت منحنی الخط در صفحه:
  - مثال:

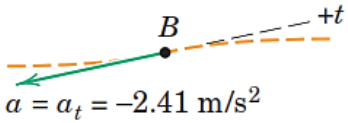


(a) شرایط در A. با داشتن شتاب کل و تعیین a_t ، به راحتی می‌توان a_n و در نتیجه ρ را حساب کرد.

$$\left[a^2 = a_n^2 + a_t^2\right] \qquad a_n^2 = 3^2 - (2.41)^2 = 3.19 \ , \ a_n = 1.785 \ \text{m/s}^2$$

$$\left[a_n = \frac{v^2}{\rho}\right] \qquad \rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(27.8)^2}{1.785} = 432 \ \text{m}$$ جواب

(b) شرایط در B. چون شعاع انحنا در نقطه عطف منحنی بینهایت است، در نتیجه $a_n = 0$ و :



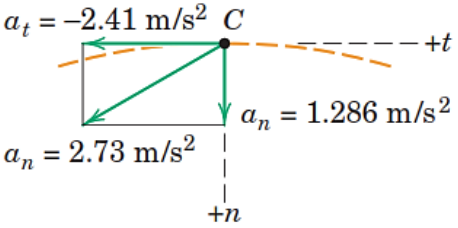
$$a = a_t = -2.41 \ \text{m/s}^2$$ جواب

(c) شرایط در C. شتاب عمودی و شتاب کل به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\left[a_n = v^2/\rho\right] \qquad a_n = (13.89)^2/150 = 1.286 \ \text{m/s}^2$$

توسط بردارهای یکه $\mathbf{e}_n$ و $\mathbf{e}_t$ ، بردار شتاب به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\mathbf{a} = 1.286\,\mathbf{e}_n - 2.41\,\mathbf{e}_t \ \text{m/s}^2$$



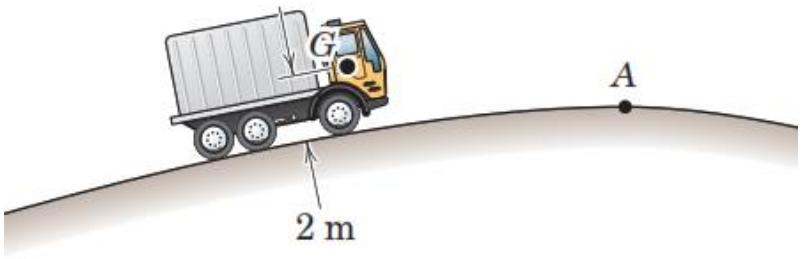
که در آن اندازه شتاب $\mathbf{a}$ برابر است با:

$$\left[a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}\right] \qquad a = \sqrt{(1.286)^2 + (-2.41)^2} = 2.73 \ \text{m/s}^2$$ جواب

برای وضوح، بردارهای شتاب که نمایش دهنده شرایط در هر یک از سه نقطه می‌باشد در شکل نشان داده شده‌اند.

سینماتیک ذرات

- حرکت منحنی الخط در صفحه:



- مثال: ۱۰۱-۲ هنگامیکه کامیون از نقطه A بلندی یک جاده با سرعت ثابت عبور می‌کند، راننده آن دارای شتاب $0/4\ g$ می‌باشد. شعاع انحنای جاده در A، ۹۸ m و G مرکز جرم راننده (یک ذره در نظر گرفته شود) ۲ m بالاتر از سطح جاده می‌باشد. سرعت v کامیون را پیدا کنید.

سرعت ثابت $\Rightarrow a_t = 0$

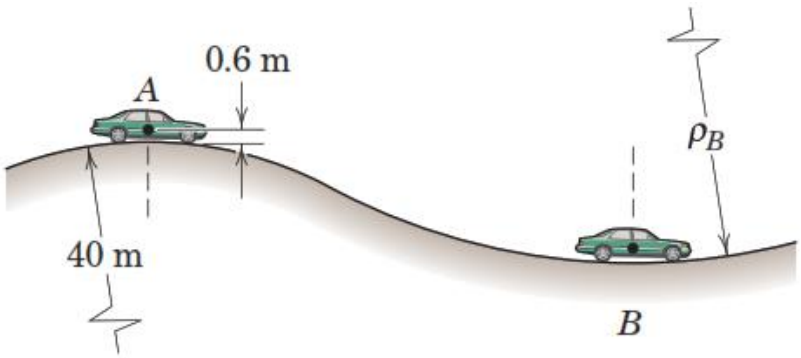
$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$ $\Rightarrow a = a_n$

$a_n = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow 0,4 \times 9,81 = \frac{v^2}{98+2} \Rightarrow$

$v = 19,81\ \frac{m}{s}$

سینماتیک ذرات

- حرکت منحنی الخط در صفحه:
  - مثال:



۲-۱۰۵ مقدار سرعت یک اتومبیل به طور یکنواخت نسبت به زمان از ۵۰ km/h در نقطه A به ۱۰۰km/h در نقطه B در مدت زمان ۱۰ ثانیه می‌رسد. شعاع انحنا در بلندی A برابر ۴۰ m است. اگر مقدار شتاب کل مرکز جرم اتومبیل در B همان باشد که در A است، شعاع انحنای ρ_B در گودی B جاده را بدست آورید. مرکز جرم اتومبیل ۰/۶ m بالاتر از سطح جاده است.

سینماتیک ذرات

- حرکت منحنی الخط در صفحه:
  - مثال:

$$v_A = 50\ \frac{Km}{h} = \frac{50}{3,6} = 13,89\ \frac{m}{s}$$

$$v_B = 100\ \frac{Km}{h} = \frac{100}{3,6} = 27,78\ \frac{m}{s}$$

شتاب متوسط بین نقطه A و B: $a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a_t = \frac{27,78 - 13,89}{10} = 1,389\ \frac{m}{s^2}$

شتاب عمود بر مسیر در A: $a_n = \frac{v_A^2}{\rho} \Rightarrow a_n = \frac{13,89^2}{40+0,6} = 4,75\ \frac{m}{s^2}$

شتاب کل در A: $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \Rightarrow a = \sqrt{1,389^2 + 4,75^2} = 4,95\ \frac{m}{s^2}$

سینماتیک ذرات

- حرکت منحنی الخط در صفحه:
- مثال:

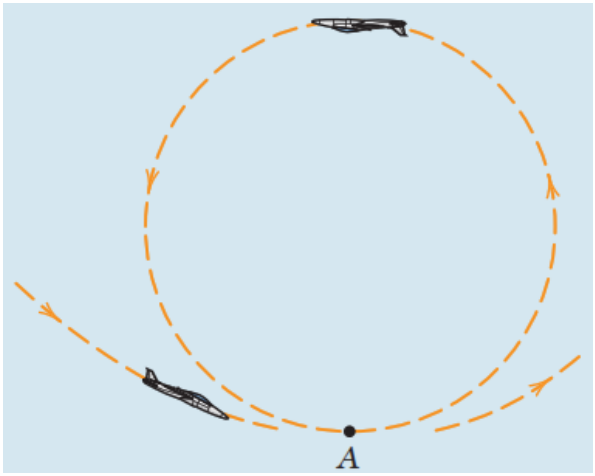
شتاب مماسی $a_t = 0$

شتاب عمودی $a_n = \frac{v_B^2}{\rho_B - 0,6} \Rightarrow 4,95 = \frac{27,78^2}{\rho_B - 0,6}$

$$\rho_B = 156,5 \text{ m}$$

سینماتیک ذرات

- حرکت منحنی الخط در صفحه:
  - مثال:



۲-۱۱۲ شتاب کل هواپیمایی که مسیر حلقه‌ای عمودی را طی می‌کند در پایین‌ترین نقطه یعنی A برابر $3g$ می‌باشد. اگر سرعت هواپیما ۸۰۰ km/h بوده و با میزان ۲۰ km/h در هر ثانیه افزایش یابد، شعاع انحنای ρ را در نقطه A مسیر محاسبه کنید.

سینماتیک ذرات

- حرکت منحنی الخط در صفحه:
  - مثال:

$$a_t = \frac{20}{3,6}\ \frac{m}{s^2} = 5,56\ \frac{m}{s^2}$$

$$a = 3g = 3 \times 9,81 = 29,43\ \frac{m}{s^2}$$

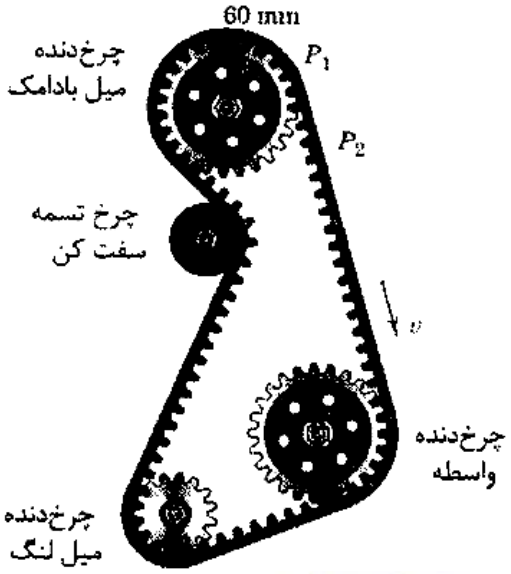
$$a^2 = a_t^2 + a_n^2 \quad \Rightarrow \quad a_n^2 = 29,43^2 - 5,56^2 = 835,21$$

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{a_n = 28,9\ \frac{m}{s^2}} \\ a_n = \frac{v^2}{\rho} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 28,9 = \frac{(800/3,6)^2}{\rho}$$

$$\boxed{\rho = 1709\ m}$$

سینماتیک ذرات

- حرکت منحنی الخط در صفحه:
  - مثال: ۲-۱۱۸ سیستم حرکت میل بادامک یک موتور چهار سیلندر اتومبیلی در شکل مشاهده می‌گردد. هنگام شتاب گیری موتور، سرعت v تسمه به طور یکنواخت از ۳ m/s به ۶ m/s در مدت ۲ ثانیه افزایش می‌یابد. مقدار شتاب نقاط P_1 و P_2 را در وسط این بازه زمانی حساب کنید.



$v_1 = 3\ m/s$

$v_2 = 6\ m/s$

$\Delta t = 2\ s$

$\Rightarrow$ متوسط $a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{6-3}{2} = 1,5\ m/s^2$

سرعت در وسط بازه زمانی: $v = 3+1,5 = 6-1,5 = 4,5\ m/s$

P_2 نقطه $\longrightarrow$ مسیر مستقیم $\Rightarrow$ P_2 نقطه $a_t = 1,5\ m/s^2$

P_1 نقطه:

$a_t = 1,5\ m/s^2$

$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{4,5^2}{(60\times10^{-3})} = 337,5\ m/s^2$

$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$