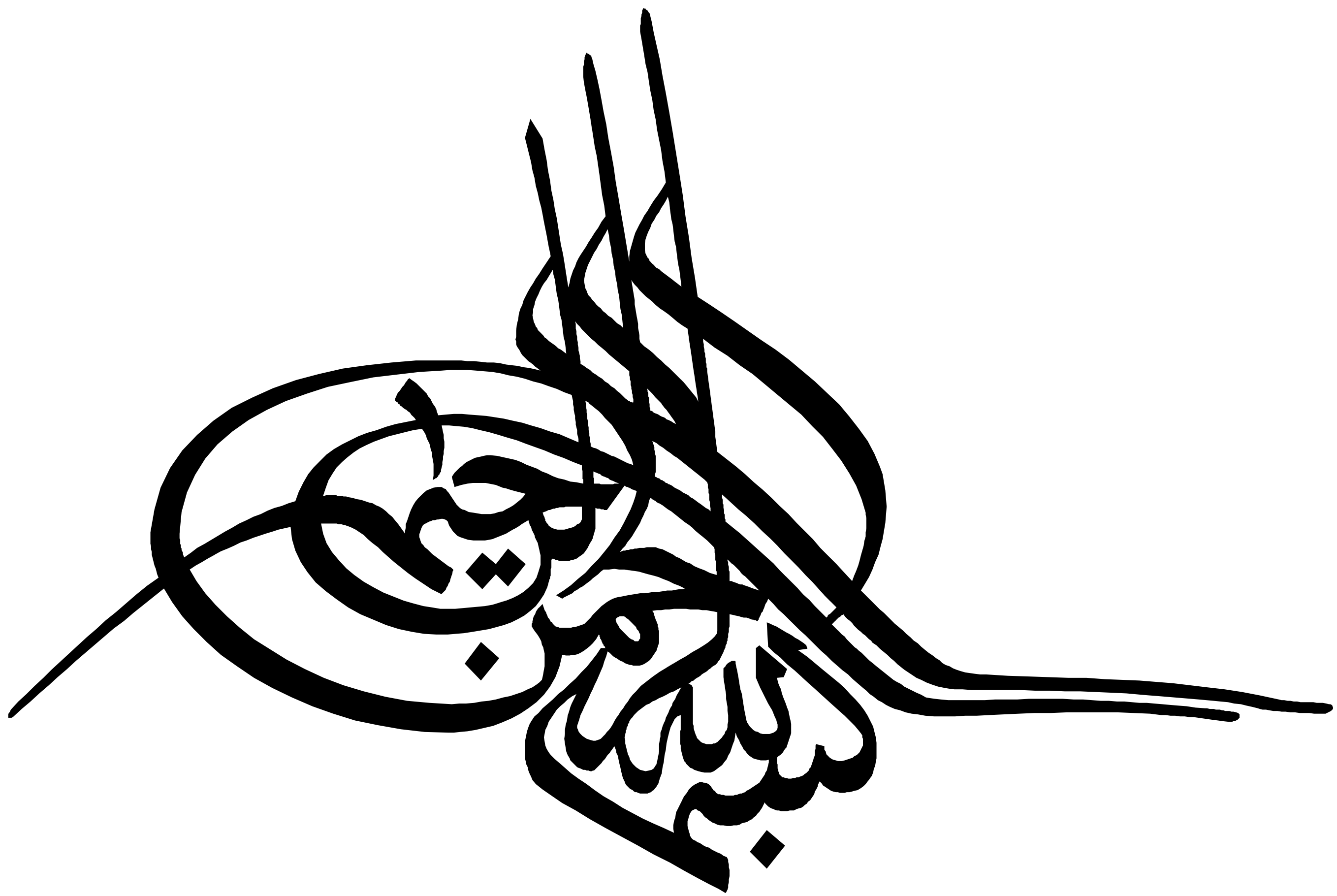

بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه فنی و حرفه ای

ریاضی و کاربرد آن در حسابداری ۲

ثریا دیده‌بان

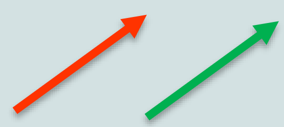
دانشگاه فنی و حرفه‌ای

بردار

هر ماتریس با یک ستون را یک بردار می‌نامیم و تعداد سطرهای آن را بعد بردار می‌نامیم. یک بردار سه بعدی پاره خط جهت‌داری در فضا است.

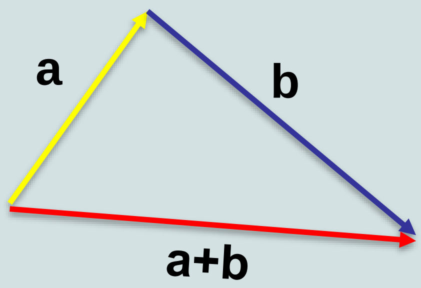
دو بردار را برابر می‌نامیم هرگاه دارای طول و جهت برابـر باشـند (نقطه ابتدایی مهم نیست).

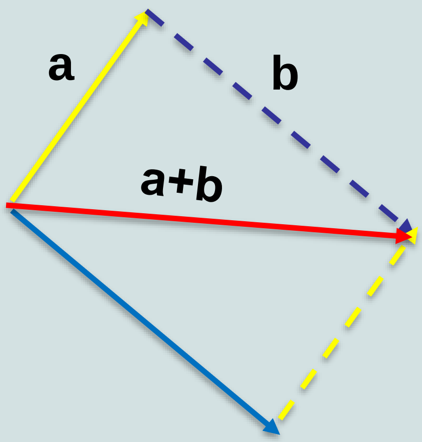
دو بردار مقابل برابرند.



بردار

جمع دو بردار به دو روش مثلثی و متوازی الاضلاع امکـان پـذیر است.





بردار

دانشگاه فنی و حرفه‌ای

طول بردار $\vec{a}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ به صورت $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ تعریف می‌شود و هر بردار با طول یک را بردار یکه می‌نامیم. با قرار دادن $\vec{\imath}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$، $\vec{\jmath}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ و $\vec{k}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ می‌توان بردار $\vec{a}$ را به صورت

$$\vec{a}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}$$

نمایش داد.

بردار

دانشگاه فنی و حرفه‌ای

جمع و ضرب داخلی دو بردار به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \quad , \quad \vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\vec{i} + (a_2 + b_2)\vec{j} + (a_3 + b_3)\vec{k}$$

$$\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|cos\theta$$

$$\Longrightarrow \theta = Arc\ cos\ \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

بردار

ضرب خارجی دو بردار به صورت زیر انجام می‌شود.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| sin\,\theta$$

کاربردها

دانشگاه فنی و حرفه‌ای

حل دستگاه‌های معادلات:

الف: دستگاه دو معادله دو مجهولی

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

ابتدا دستگاه را به صورت ماتریسی می‌نویسیم:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$$

اگر A وارون‌پذیر باشد، داریم

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$$

کاربردها

ب: دستگاه سه معادله سه مجهولی:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

اولین روش برای حل این دستگاه، استفاده از وارون ماتریس ضرایب است.

کاربردها

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}}_{B} \Longrightarrow AX = B$$

اگر ماتریس A وارون‌پذیر باشد، داریم:

$$X = A^{-1}B$$

دانشگاه فنی و حرفه ای

کاربردها

دومین روش، تشکیل ماتریس افزوده و اعمال سطری مقدماتی است.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow A' = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$$

کاربردها

دانشگاه فنی و حرفه‌ای

مثال: دستگاه معادلات زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} 5x + 2y - z = 3 \\ x + 2z = 1 \\ y - z = -1 \end{cases}$$

حل: روش اول. ابتدا دستگاه را به صورت ماتریسی می‌نویسیم.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

دترمینان A را به روش ساروس حساب می‌کنیم.

$$det\,(A) = \big(0 + 0 + (-1)\big) - (0 + 10 - 2) = -9$$

کاربردها

چون دترمینان مخالف صفر است، پس ماتریس وارون‌پذیر است. لذا وارون A را محاسبه می‌کنیم. اول همسازه‌های A را پیدا می‌کنیم .

$$A_{11} = (-1)^{1+1} det \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 1 \times -2 = -2$$

به همین ترتیب داریم:

$$A_{11} = -2 \quad ; \quad A_{12} = 1 \quad ; \quad A_{13} = 1$$

$$A_{21} = 1 \quad ; \quad A_{22} = -5 \quad ; \quad A_{23} = -5$$

$$A_{31} = 4 \quad ; \quad A_{32} = -11 \quad ; \quad A_{33} = -2$$

کاربردها

دانشگاه فنی و حرفه‌ای

پس داریم

$$A_{ij}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -5 & -5\\ 4 & -11 & -2\end{bmatrix}$$

لذا ماتریس الحاقی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$adj(A)=(A_{ij})^t=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 4\\ 1 & -5 & -11\\ 1 & -5 & -2\end{bmatrix}$$

کاربردها

بنابراین

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\, adj(A)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-9}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & -5 & -11 \\ 1 & -5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{-4}{9} \\ \frac{-1}{9} & \frac{5}{9} & \frac{11}{9} \\ \frac{-1}{9} & \frac{5}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$$

کاربردها

$$\Longrightarrow X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{-4}{9} \\ \frac{-1}{9} & \frac{5}{9} & \frac{11}{9} \\ \frac{-1}{9} & \frac{5}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases}$$

کاربردها

روش دوم:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) =$$

سطر اول و دوم را با هم جابجا می‌کنیم:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) =$$

منفی 5 برابر سطر اول را با سطر دوم جمع می‌کنیم:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -11 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) =$$

دانشگاه فنی و حرفه‌ای

کاربردها

سطر دوم و سوم را با هم جابجا می‌کنیم:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -11 & -2 \end{array}\right) =$$

منفی دو برابر سطر دوم را با سطر سوم جمع می‌کنیم:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

کاربردها

پس داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2z = 1 \\ y - z = -1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 0 = 1 \Rightarrow x = 1 \\ y - 0 = -1 \Rightarrow y = -1 \\ z = 0 \end{cases}$$

مثال

کارخانه‌ای سه محصول یخچال، اجاق گاز و جاروبرقی تولید کرده و به فروش می‌رساند. شرکتی برای خرید 100 یخچال، 200 اجاق گاز و 500 جاروبرقی مبلغ دو میلیارد و هشتصد میلیون تومان پرداخت می‌کند. همچنین شرکت کوچکی برای 10 یخچال، 15 اجاق گاز و 50 جاروبرقی مبلغ 255 میلیون تومان پرداخت می‌کند. اگر مجموع قیمت این محصولات 15 میلیون تومان باشد، قیمت هر کدام چقدر است؟

مثال

حل: قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} x & \text{قیمت یخچال} \\ y & \text{قیمت اجاق‌گاز} \\ z & \text{قیمت جاروبرقی} \end{cases}$$

پس طبق فرض مساله خواهیم داشت:

$$\begin{cases} 100x + 200y + 500z = 2800000000 \\ 10x + 15y + 50z = 255000000 \\ x + y + z = 15000000 \end{cases}$$

مثال

$$\begin{bmatrix} \mathbf{100} & \mathbf{200} & \mathbf{500} \\ \mathbf{10} & \mathbf{15} & \mathbf{50} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{2800000000} \\ \mathbf{255000000} \\ \mathbf{15000000} \end{bmatrix}$$

به یکی از دو روش توضیح داده شده، وارون ماتریس را پیدا می‌کنیم:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{400} & \frac{3}{20} & \frac{5}{4} \\ \frac{1}{50} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال

بنابراین:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 2800000000 \\ 255000000 \\ 15000000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8000000 \\ 5000000 \\ 2000000 \end{bmatrix}$$

پس قیمت یخچال هشت میلیون، قیمت اجاق گاز پنج میلیون و قیمت جارو برقی دومیلیون می‌باشد.