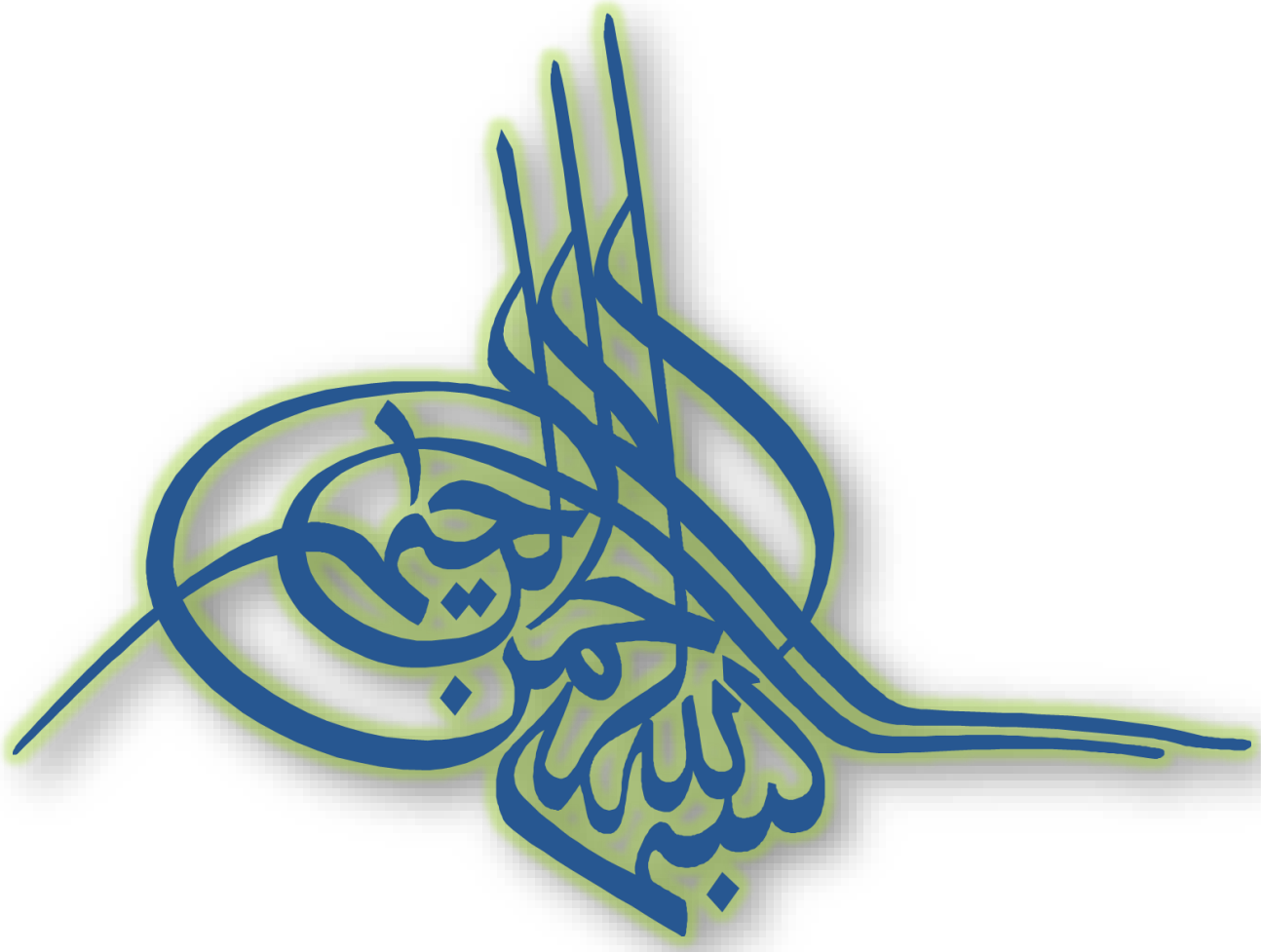
دینامیک
جلسه چهارم

مدرس:
دکتر علیرضا بابائی

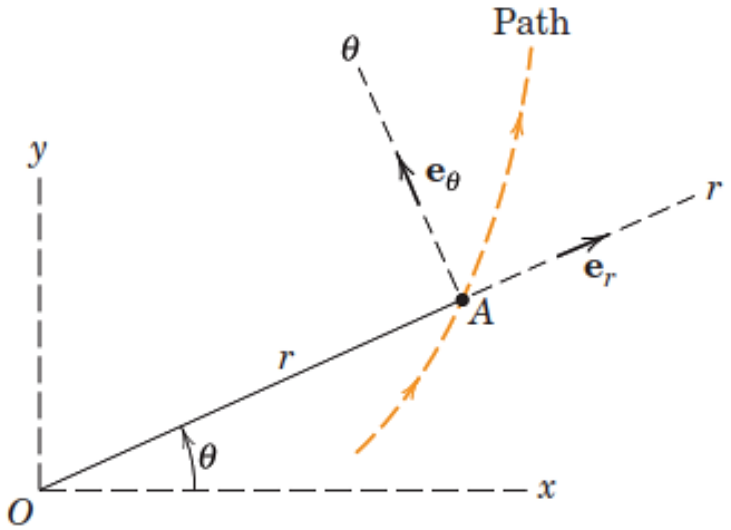
آموزشکده فنی شماره ۲ تبریز


بسم الله الرحمن الرحیم

سینماتیک ذرات

- حرکت منحنی الخط در صفحه:
  - مختصات قطبی (r و θ)

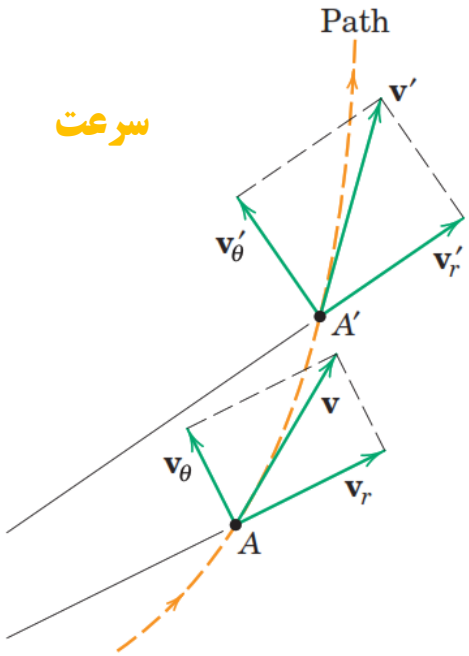
اکنون توصیف سوم حرکت منحنی الخط در صفحه را در نظر می‌گیریم که مختصات قطبی نامیده می‌شود که در آن موقعیت ذره توسط فاصله شعاعی r از قطبی ثابت و همچنین توسط زاویه θ خط شعاعی مشخص می‌گردد. مختصات قطبی به ویژه وقتی مورد استفاده واقع می‌شود که فاصله شعاعی و موقعیت زاویه‌ای حرکت به طور مقید، کنترل گردد یا هنگامی که فاصله شعاعی و موقعیت زاویه‌ای به طور غیر مقید، اندازه گیری شود.



سینماتیک ذرات

- حرکت منحنی الخط در صفحه:
  - مختصات قطبی (r و θ)

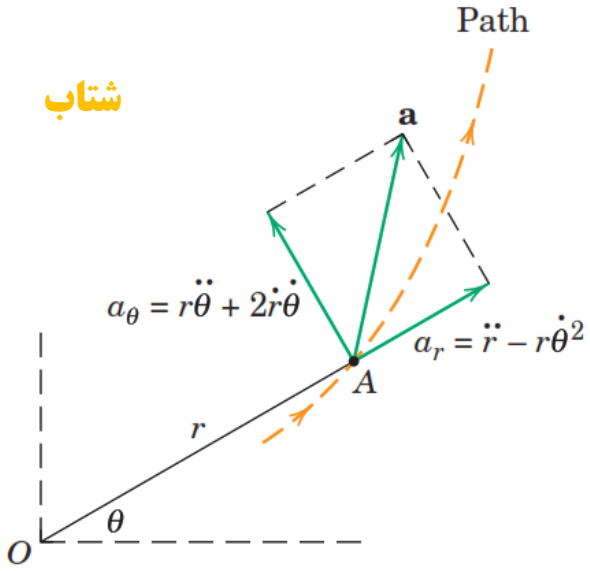
سرعت



$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$

$$v_r = \dot{r}$$
$$v_\theta = r\dot{\theta}$$
$$v = \sqrt{{v_r}^2 + {v_\theta}^2}$$

شتاب



$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta$$

$$a_r = \ddot{r} - r\theta^2$$
$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$
$$a = \sqrt{{a_r}^2 + {a_\theta}^2}$$

سینماتیک ذرات

- حرکت منحنی الخط در صفحه:
  - مختصات قطبی (r و θ)
    - حرکت دایره ای

سرعت

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$

$$v_r = \dot{r}$$
$$v_\theta = r\dot{\theta}$$
$$v = \sqrt{{v_r}^2 + {v_\theta}^2}$$

شتاب

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta$$

$$a_r = \ddot{r} - r\theta^2$$
$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$
$$a = \sqrt{{a_r}^2 + {a_\theta}^2}$$

$v_r = 0$ $\quad v_\theta = r\dot{\theta}$

$a_r = -r\dot{\theta}^2$ $\quad a_\theta = r\ddot{\theta}$

سینماتیک ذرات

- حرکت منحنی الخط در صفحه:
  - مثال: دوران بازوی شیاردار شعاعی توسط رابطه $\theta = ۰/۲t + ۰/۰۲t^3$ مشخص شده است که در آن θ بر حسب رادیان و t بر حسب ثانیه می‌باشد. به طور همزمان پیچ قدرت لغزنده B را به بازو درگیر نموده و فاصله آن را از O طبق رابطه $r = ۰/۲ + ۰/۰۴t^2$ کنترل می‌نماید که در آن r بر حسب متر و t بر حسب ثانیه می‌باشد. مقادیر سرعت و شتاب لغزنده را در $t = ۳$ s محاسبه کنید.

حل: ابتدا مختصات و مشتق‌های جملات مربوط به روابط سرعت و شتاب که در مختصات قطبی تعریف شدند را بدست آورده و برای $t = ۳$ s آنها را محاسبه می‌کنیم.

$$r = 0.2 + 0.04\,t^2 \qquad r_3 = 0.2 + 0.04\,(3^2) = 0.56 \text{ m}$$

$$\dot{r} = 0.08\,t \qquad \dot{r}_3 = 0.08\,(3) = 0.24 \text{ m/s}$$

$$\ddot{r} = 0.08 \qquad \ddot{r}_3 = 0.08 \text{ m/s}^2$$

$$\theta = 0.2\,t + 0.02\,t^3 \qquad \theta_3 = 0.2\,(3) + 0.02\,(3^3) = 1.14 \text{ rad}$$

$$\text{یا } \theta_3 = 1.14\,(180/\pi) = 65.3°$$

$$\dot{\theta} = 0.2 + 0.06\,t^2 \qquad \dot{\theta}_3 = 0.2 + 0.06\,(3^2) = 0.74 \text{ rad/s}$$

$$\ddot{\theta} = 0.12\,t \qquad \ddot{\theta}_3 = 0.12\,(3) = 0.36 \text{ rad/s}^2$$

سینماتیک ذرات

- حرکت منحنی الخط در صفحه:
- مثال:

$$[v_r = \dot{r}] \qquad v_r = 0.24 \text{ m/s}$$

$$[v_\theta = r\dot{\theta}] \qquad v_\theta = 0.56\,(0.74) = 0.414 \text{ m/s}$$

$$\left[v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}\right] \qquad v = \sqrt{(0.24)^2 + (0.414)^2} = 0.479 \text{ m/s}$$

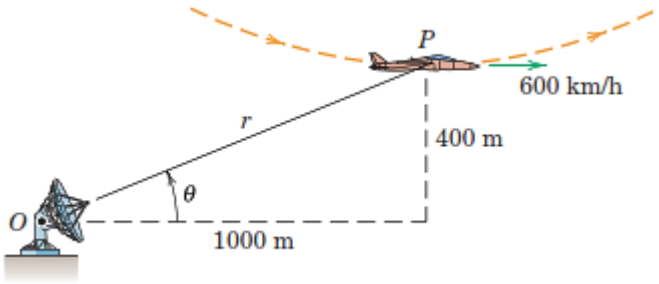
$$[a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2] \qquad a_r = 0.08 - 0.56\,(0.74)^2 = -0.227 \text{ m/s}^2$$

$$[a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}] \qquad a_\theta = 0.56\,(0.36) + 2\,(0.24)(0.74) = 0.557 \text{ m/s}^2$$

$$\left[a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}\right] \qquad a = \sqrt{(-0.227)^2 + (0.557)^2} = 0.601 \text{ m/s}^2$$

سینماتیک ذرات

- حرکت منحنی الخط در صفحه:
  - مثال:



۲-۱۴۲ در پایین‌ترین نقطه یک حلقه در صفحه قائم $(r\text{-}\theta)$ و در ارتفاع ۴۰۰ m، هواپیمای P دارای سرعت افقی ۶۰۰ km/h و بدون شتاب افقی است. شعاع انحنای حلقه ۱۲۰۰ m می‌باشد. رادار ردیاب مستقر در O، در این لحظه چه مقادیری را برای $\dot{r}$ و $\ddot{\theta}$ ثبت می‌کند.

سینماتیک ذرات

- حرکت منحنی الخط در صفحه:
- مثال:

$$v_r = \dot{r} = v\cos\theta = 166.7\cos 21.8^\circ = 154.7 \text{ m/s}$$

$$v_\theta = r\dot{\theta} : -166.7\sin 21.8^\circ = 1077\dot{\theta},\ \dot{\theta} = -0.0575 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 : 23.1\sin 21.8^\circ = \ddot{r} - 1077(-0.0575)^2$$

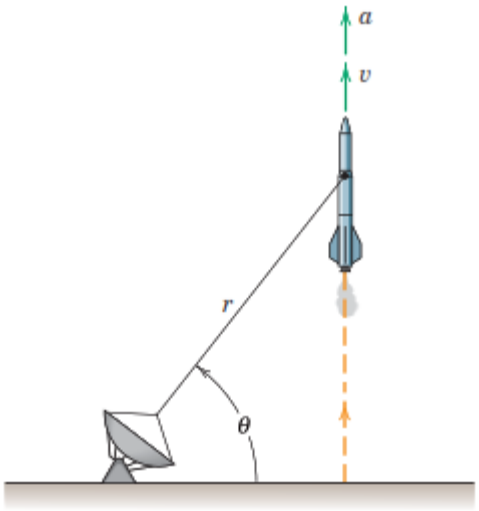
$$\underline{\ddot{r} = 12.15 \text{ m/s}^2}$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} : 23.1\cos 21.8^\circ = 1077\ddot{\theta} + 2(154.7)(-0.0575)$$

$$\underline{\ddot{\theta} = 0.0365 \text{ rad/s}^2}$$

سینماتیک ذرات

- حرکت منحنی الخط در صفحه:



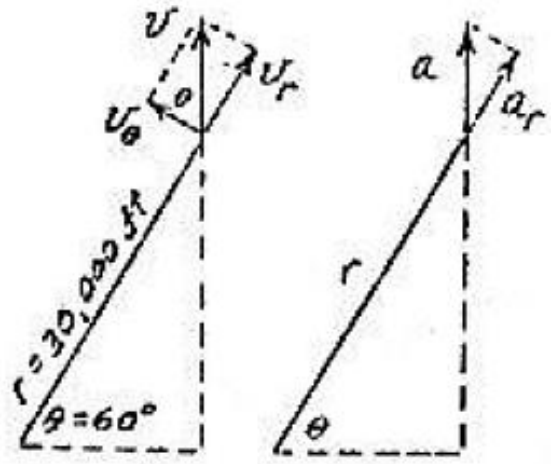
- مثال: ۲-۱۳۸ موشکی به حالت قائم شلیک شده و مطابق شکل توسط راداری ردیابی می‌شود. در لحظه‌ای که $\theta = ۶۰^\circ$ است، اندازه‌گیری‌ها نشان می‌دهد که $r = ۹$ km، $\dot{r} = ۲۱$ m/s^2 و $\dot{\theta} = ۰/۰۲$ rad/s می‌باشند. مقادیر سرعت و شتاب موشک را در این موقعیت بدست آورید.

$$v_\theta = r\dot{\theta} = 9(10^3)(0.020) = 180 \text{ m/sec}$$

$$v = v_\theta / \cos 60^\circ = 180/0.5 = 360 \text{ m/s}$$

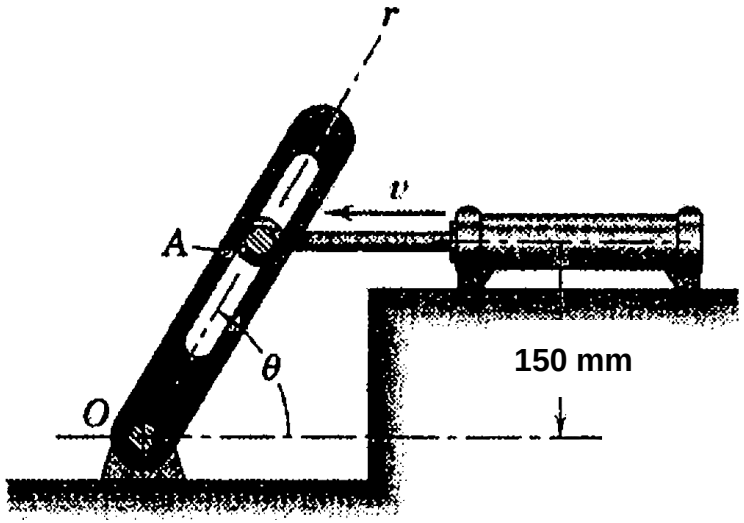
$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 21 - 9(10^3)(0.020)^2 = 17.4 \text{ m/sec}^2$$

$$a = a_r / \sin 60^\circ = 17.4/0.866 = 20.1 \text{ m/s}^2$$



سینماتیک ذرات

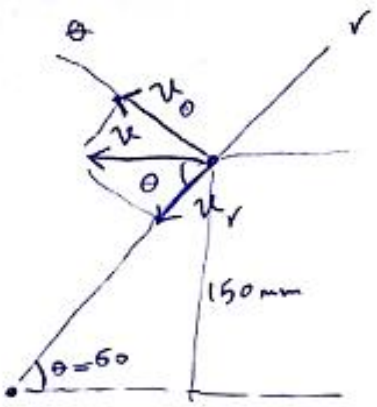
- حرکت منحنی الخط در صفحه:
  - مثال:



۲-۱۶۲ پیستون یک سیلندر هیدرولیکی به پین A سرعت ثابت $v = 1/5\ m/s$ را در جهت نشان داده شده در برهه‌ای از حرکتش می‌دهد. به ازای $\theta = 60^\circ$ معین کنید: $\dot{r}$ ، $\ddot{r}$ و $\ddot{\theta}$ که در آن $r = \overline{OA}$ باشد.

سینماتیک ذرات

- حرکت منحنی الخط در صفحه:
- مثال:



$$r = \frac{150}{\sin\theta} = \frac{150}{\sin 60} = 173,2 \text{ mm}$$

$$\boxed{r = 0,1732 \text{ m}}$$

$$v_r = \dot{r} = -v\cos\theta = -1,5 \times \cos 60 = -0,75 \Rightarrow \boxed{\dot{r} = -0,75 \frac{m}{s}}$$

$$v_\theta = r\dot{\theta} = v\sin\theta \Rightarrow 0,173 \times \dot{\theta} = 1,5 \times \sin 60 \Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = 7,5 \frac{rad}{s}}$$

سینماتیک ذرات

- حرکت منحنی الخط در صفحه:
- مثال:

سرعت ثابت $\Rightarrow a=0 \Rightarrow \begin{cases} a_r=0 \\ a_\theta=0 \end{cases}$

$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=0 \Rightarrow \ddot{r}-0{,}173\times(7{,}5)^2=0$

$\Rightarrow \boxed{\ddot{r}=9{,}73\ \frac{m}{s^2}}$

$a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=0 \Rightarrow 0{,}173\times\ddot{\theta}+2\times(-0{,}75)\times 7{,}5=0$

$\boxed{\ddot{\theta}=65{,}03\ \frac{rad}{s^2}}$