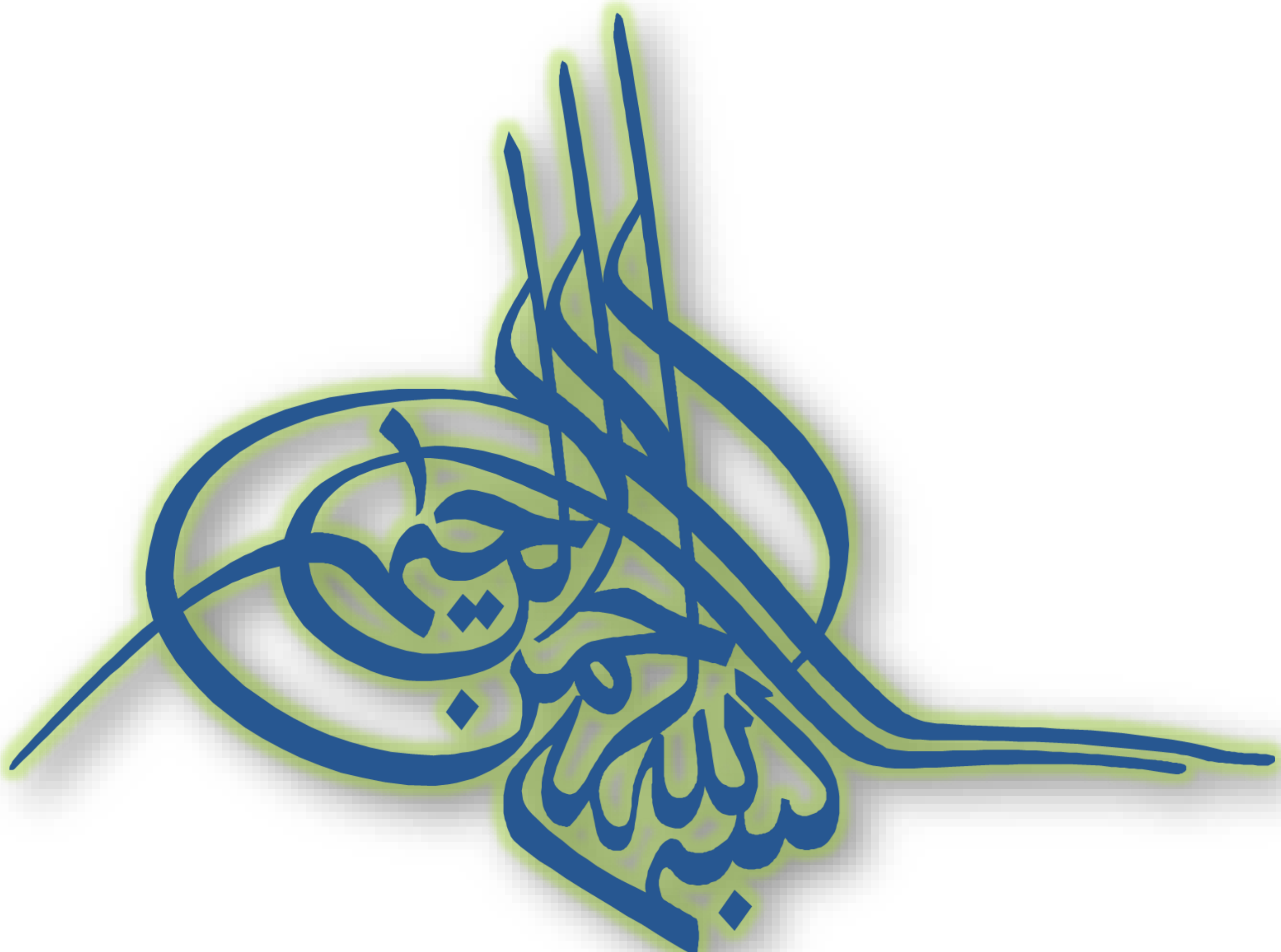
دانشگاه فنی و حرفه‌ای استان آذربایجان شرقی
East Azarbaijan University of Technical & Vocational

دینامیک

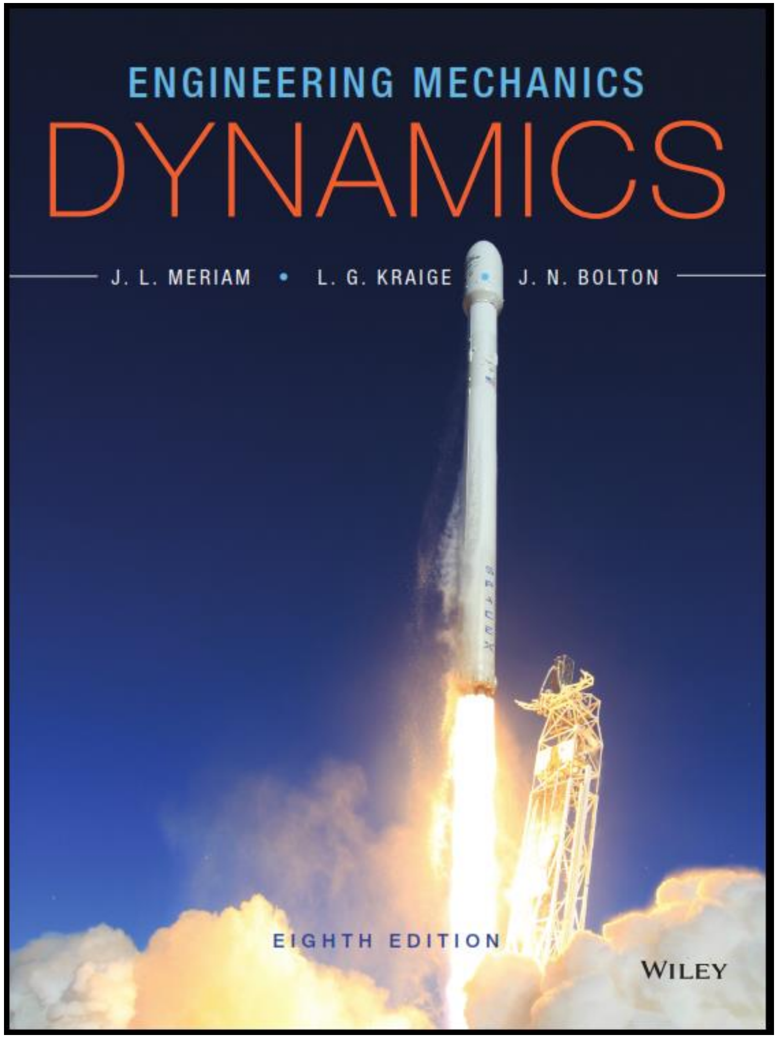
جلسه اول

مدرس:
دکتر علیرضا بابائی

آموزشکده فنی شماره ۲ تبریز


بسم الله الرحمن الرحیم

منابع و سرفصل درس



- منابع درس:
  - دینامیک (تالیف: مریام)

- **سرفصل درس:**
  - سینماتیک ذرات
  - سینتیک ذرات
  - سینتیک سیستم ذرات
  - سینماتیک اجسام صلب
  - سینتیک اجسام صلب

مقدمه

- استاتیک
- مقاومت مصالح
- دینامیک (پویایی و حرکت)

سینماتیک

(مطالعه و بررسی حرکت بدون در نظر گرفتن نیروها و گشتاورها)

سینتیک

(مطالعه و بررسی حرکت با در نظر گرفتن نیروها و گشتاورها)

سینماتیک ذرات

سینماتیک شاخه‌ای از دینامیک است که حرکت اجسام را بدون اشاره به نیروهای عامل حرکت توصیف می‌کند. غالباً از سینماتیک به عنوان «هندسه حرکت» یاد می‌کنند. طراحی بادامکها، چرخ دنده‌ها، مکانیزمهای میله‌ای و سایر اجزاء ماشین برای کنترل یا ایجاد حرکات خاص و محاسبه مسیر پرواز هواپیماها، راکتها و فضاپیماها مثالهایی از مسائل سینماتیکی است که مورد استفاده مهندسان واقع می‌شود. آشنایی کامل در مورد سینماتیک، مقدمه‌ای لازم جهت سینتیک است که رابطه بین حرکت و نیروهای متناظری که باعث حرکت می‌شوند را مطالعه می‌کند.

- تعریف ذره:

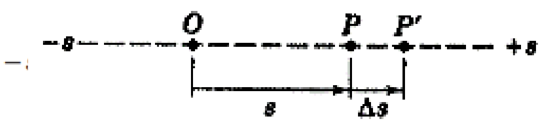
اگر ابعاد فیزیکی جسمی در مقایسه با مسیر حرکتش به اندازه کافی کوچک باشد می توان آن جسم را ذره در نظر گرفت.

اگر ذره در یک مسیر خاص هدایت شده باشد، مانند مهره‌ای که در امتداد سیمی ثابت می‌لغزد، حرکت را *مقید* نامند. اگر هیچ نوع هادی فیزیکی وجود نداشته باشد، حرکت را *نامقید* می‌خوانند. سنگ کوچکی که به انتهای نخی بسته و چرخانده می‌شود، حرکت مقید دارد و پس از پاره شدن نخ، حرکت نامقید می‌شود.

سینماتیک ذرات

- حرکت مستقیم الخط:

ذره P را که در امتداد یک خط مستقیم حرکت می‌نماید در نظر بگیرید (شکل ۲-۲). موقعیت P در هر لحظه از زمان t توسط فاصله s آن از یک مبدا ثابت O در روی خط مشخص می‌گردد. در زمان $t+\Delta t$ ذره به P' حرکت نموده و مختصاتش به $s+\Delta s$ می‌رسد. تغییرات موقعیت مختصات در فاصله زمانی Δt را جابجایی Δs ذره می‌نامند. اگر ذره در جهت منفی s حرکت کند، جابجایی باید منفی باشد.



شکل (۲-۲)

سرعت و شتاب

سرعت متوسط ذره در مدت زمان Δt از تقسیم جابجایی بر مدت زمان آن بدست می‌آید یا $v_{av} = \Delta s/\Delta t$. اگر Δt کوچکتر شده و به سمت صفر میل نماید، سرعت متوسط به سرعت *لحظه‌ای* ذره نزدیک می‌گردد که عبارت است از $v = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta s/\Delta t$ یا:

$$\boxed{v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}} \qquad (۲-۱)$$

سینماتیک ذرات

- حرکت مستقیم الخط:

بنابراین، سرعت، آهنگ تغییرات زمانی مختصات موقعیت s می‌باشد. سرعت مثبت یا منفی بستگی به جابجایی مثبت یا منفی دارد.

شتاب متوسط یک ذره در طی مدت زمان Δt از تقسیم تغییرات سرعت بر زمان آن تغییرات بدست می‌آید یا $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$. اگر Δt کوچکتر شده و به سمت صفر میل نماید، شتاب متوسط به *شتاب لحظه‌ای* ذره تبدیل می‌گردد که عبارت است از: $a=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}$ یا:

$$\boxed{a=\frac{dv}{dt}=\dot{v}} \quad \text{or} \quad \boxed{a=\frac{d^2s}{dt^2}=\ddot{s}} \qquad (۲-۲)$$

با حذف dt بین معادله ۱-۲ و اولین معادله ۲-۲ معادله دیفرانسیلی بدست خواهد آمد که تغییر مکان، سرعت و شتاب را با هم مرتبط می‌سازد.

$$\boxed{v\,dv=a\,ds} \quad \text{or} \quad \boxed{\dot{s}\,d\dot{s}=\ddot{s}\,ds} \qquad (۲-۳)$$

سینماتیک ذرات

- حرکت مستقیم الخط:
  - شتاب ثابت

(a) شتاب ثابت: هنگامیکه a ثابت است، از اولین رابطه معادلات ۲-۲ و ۳-۲، می‌توان مستقیماً انتگرال گرفت. برای ساده شدن مسئله فرض می‌شود که شرایط اولیه حرکت $s = s_0$ ، $v = v_0$ و $t = 0$ باشد. بنابراین پس از گذشت زمان t ، معادله انتگرال‌گیری شده به صورت زیر در می‌آید.

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt} = \dot{v}}$$

$$\int_{v_0}^{v} dv = a \int_0^t dt \qquad \text{or} \qquad v = v_0 + at$$

$$\boxed{v\,dv = a\,ds}$$

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = a \int_{s_0}^{s} ds \qquad \text{or} \qquad v^2 = {v_0}^2 + 2a(s - s_0)$$

با قرار دادن v از روابط فوق در معادله ۱-۲ و انتگرال‌گیری از آن نسبت به زمان t:

$$\boxed{v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}}$$

$$\int_{s_0}^{s} ds = \int_0^t (v_0 + at)\,dt \qquad \text{or} \qquad s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

سینماتیک ذرات

- حرکت مستقیم الخط:
  - مثال

جابجایی ذره‌ای که محدود به حرکت در یک خط مستقیم است، توسط رابطه $s = ۲t^۳ - ۲۴t + ۶$ داده شده که در آن s بر حسب متر از نقطه مرجع مناسبی اندازه‌گیری شده و t بر حسب ثانیه می‌باشد. مطلوب است: (a) زمان لازم که ذره از شرایط اولیه $t = ۰$ برای رسیدن به سرعت ۷۲ m/s نیاز دارد. (b) شتاب ذره هنگامیکه $v = ۳۰$ m/s و (c) جابجایی خالص ذره در فاصله زمانی $t = ۱$ s تا $t = ٤$ s.

حل: سرعت و شتاب توسط مشتق‌گیری متوالی از s نسبت به زمان بدست می‌آیند. بنابراین:

$$[v = \dot{s}] \qquad v = 6t^2 - 24 \ \text{m/s}$$

$$[a = \dot{v}] \qquad a = 12t \ \text{m/s}^2$$

(a) با قرار دادن $v = ۷۲$ m/s در عبارت v یعنی $۷۲ = ٦t^۲ - ۲٤$، از آن $t = \pm ٤$ s بدست می‌آید. ریشه منفی معادله بیانگر جواب ریاضی t قبل از شروع به حرکت بوده و فاقد مفهوم فیزیکی می‌باشد. بنابراین جواب مطلوب عبارت است از:

جواب: $t = 4$ s

سینماتیک ذرات

- حرکت مستقیم الخط:
  - مثال

(b) با قرار دادن $v = ۳۰$ m/s در عبارت v، یعنی $۳۰ = ۶t^2 - ۲۴$، ریشه مثبت آن $t = ۳$ s بدست آمده و شتاب متناظر با آن چنین است:

جواب:

$$a = 12\,(3) = 36 \ \ \mathrm{m/s^2}$$

(c) جابجایی خالص در طی فاصله مذکور برابر است با:

$$\Delta s = s_4 - s_1$$

یا $$\Delta s = [2(4^3) - 24(4) + 6] - [2(1^3) - 24(1) + 6] = 54 \ \ \mathrm{m}$$

که نمایانگر جابجایی خالص ذره در امتداد محورs از موقعیت متناظر با $t = ۱$ s تا موقعیت $t = ۴$ s می‌باشد.

سینماتیک ذرات

- حرکت مستقیم الخط:
  - مثال

۷-۲ شتاب ذره‌ای توسط رابطه $a = 4t - 30$ داده شده است که در آن a بر حسب متر بر مجذور ثانیه می‌باشد. سرعت و جابجایی را به صورت تابعی از زمان معین کنید. در $t = 0$ جابجایی اولیه $s_0 = -5$ m و سرعت اولیه $v_0 = 3$ m/s می‌باشد.

$$a = 4t - 30$$

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a\,dt \Rightarrow \int dv = \int a\,dt$$

$$v = \int (4t-30)\,dt \Rightarrow v = 2t^2 - 30t + C_1$$

شرط اولیه $v(0) = 3$ $\Rightarrow$

$$3 = 2\times 0^2 - 30\times 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 3$$

$$\boxed{v = 2t^2 - 30t + 3}$$

سینماتیک ذرات

- حرکت مستقیم الخط:
  - مثال

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = v\,dt \Rightarrow \int ds = \int v\,dt$$

$$\left.\begin{array}{l} s = \int (2t^2 - 30t + 3)\,dt \Rightarrow s = \frac{2}{3}t^3 - 15t^2 + 3t + C_2 \\ \text{شرایط اولیه} \quad s(0) = -5 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$-5 = \frac{2}{3}(0)^3 - 15 \times 0^2 + 3 \times 0 + C_2 \Rightarrow \boxed{C_2 = -5}$$

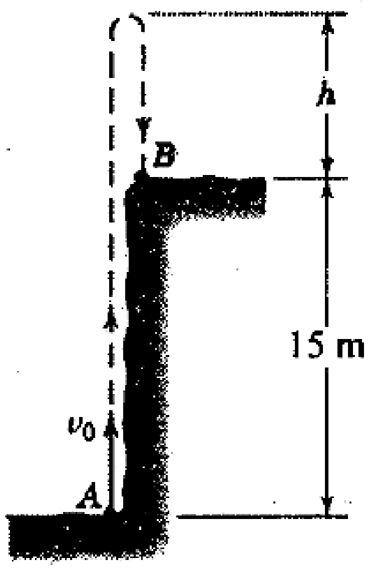
$$\boxed{s = \frac{2}{3}t^3 - 15t^2 + 3t - 5}$$

سینماتیک ذرات

دانشگاه فنی و حرفه‌ای استان آذربایجان شرقی

East Azarbaijan University of Technical & Vocational

- حرکت مستقیم الخط:
  - مثال



۲–۱۵ از پایین صخره‌ای بـه ارتفـاع ۱۵ m، از نقطـه A توپی با سرعت ۲۵ m/s به صورت قائم به طـرف بـالا پرتـاب می‌شود. ارتفاع h که توپ از لبه صخره بـه طـرف بـالا صعـود می‌کند را تعیین کرده و زمان t که توپ از لحظه پرتاب تا B که به بالای صخـره برخـورد می‌کنـد را حسـاب کنیـد. همچنیـن سرعت برخورد v_B را تعیین نمایید. از مقاومت هوا و حرکـت جزئی افقی توپ صرفنظر کنید.

سینماتیک ذرات

- حرکت مستقیم الخط:
  - مثال

$$v^2 - v_0^2 = 2a(y - y_0) \Rightarrow 0^2 - 25^2 = 2 \times -9{,}81 \times \Delta y$$

$$\Delta y = 31{,}85\ m$$

$$h = \Delta y - 15 \Rightarrow \boxed{h = 31{,}85 - 15 = 16{,}85\ m}$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a(y - y_0) \Rightarrow v_B^2 - 0^2 = 2 \times -9{,}81 \times -16{,}85$$

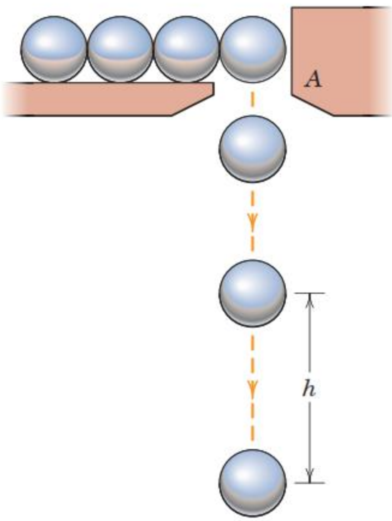
$$\Rightarrow v_B^2 = 330{,}597 \Rightarrow \boxed{v_B = 18{,}18\ m/s}$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow -18{,}18 = -9{,}81\,t + 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{t = 1{,}853\ s}$$

سینماتیک ذرات

- حرکت مستقیم الخط:
  - مثال



۲-۱۹ گوی‌های فولادی کوچکی از حـــالت ســکون از روزنهٔ A با میزان ثابت دو گوی بر ثانیه سقوط می‌کنند. فاصلــه قائم h بین دو گوی متوالــی را در لحظـه‌ای کـه گوی پـایین‌تر مسافت ۳ متر را طی کرده، پیدا کنید. از مقاومت هـوا صرفنظـر کنید.

سینماتیک ذرات

- حرکت مستقیم الخط:
  - مثال

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 + u_y t + y_0$$

$$y = -\frac{1}{2} \times 9{,}81\, t^2 + 0 \times t + 0 \Rightarrow y = -4{,}905\, t^2$$

گوی اول : $-3 = -4{,}905\, t^2 \Rightarrow \boxed{t_1 = 0{,}782}$ زمان گوی اول

زمان گوی دوم $t_2 = t_1 - 0{,}5 \Rightarrow \boxed{t_2 = 0{,}782 - 0{,}5 = 0{,}282\,s}$

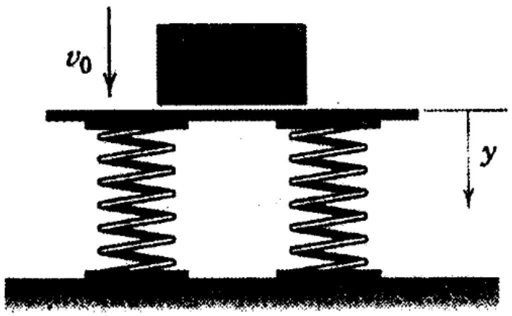
$$y = -4{,}905 \times (0{,}282)^2 \Rightarrow \boxed{y = 0{,}39\ m}$$

$$h = y_1 - y_2 = 3 - 0{,}39 = 2{,}61\ m \Rightarrow \boxed{h = 2{,}61\ m}$$

سینماتیک ذرات

- حرکت مستقیم الخط:
  - مثال

۲-۳۶ جسمی مطابق شکل با سرعت v_0 به سکویی که روی فنرهایی نصب شده برخورد کرده، همراه سکو بـه طـرف پایین حرکت می‌کند. شـتاب جسـم بعـد از برخـورد از رابطـه $a = g - cy$ بدست می‌آید کـه در آن c مقـدار ثـابت و y از موقعیت ابتدایی سکو انـدازه‌گیـری شـده اسـت. اگر مـاکزیمم فشردگی فنرها y_m باشد، مقدار c را بدست آورید.



شکل مسئله ۳۶-۲

$$a\,ds = v\,dv \Rightarrow \int v\,dv = \int a\,ds$$

$$\frac{1}{2}v^2\Big|_{v_0}^{0} = \int_0^{y_m}(g-cy)\,dy \Rightarrow -\frac{1}{2}v_0^2 = gy - \frac{c}{2}y^2\Big|_0^{y_m}$$

$$-\frac{1}{2}v_0^2 = gy_m - \frac{c}{2}y_m^2 \Rightarrow \boxed{c = \frac{v_0^2 + 2gy_m}{y_m^2}}$$