

آمار و احتمال مهندسی

دکتر داود اسداللهی

شاخصهای پراکندگی

شاخصهای مرکزی به تنهایی تصویری روشن از داده‌ها نمی‌دهند. لذا شاخص‌های پراکندگی معرفی می‌شوند. این شاخص‌ها میزان فاصله داده‌ها از مرکز را مشخص می‌کنند.

انواع شاخص‌های پراکندگی عبارتند از:

۱- دامنه تغییرات

دامنه تغییرات به صورت تفاضل بزرگترین داده و کوچکترین داده تعریف می‌شود.
یعنی

$$R = \text{کوچکترین داده} - \text{بزرگترین داده}$$

۱- دامنه تغییرات

دامنه تغییرات به صورت تفاضل بزرگترین داده و کوچکترین داده تعریف می‌شود.
یعنی

$$R = \text{کوچکترین داده} - \text{بزرگترین داده}$$

۲- واریانس

واریانس به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{X})^2}{n} = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{X}^2$$

۲- واریانس

واریانس همواره بزرگتر یا مساوی صفر است

اگر مقدار ثابت a را به تمام مشاهدات اضافه کنیم واریانس تغییر نمی‌کند

اگر تمام مشاهدات را در مقدار غیر منفی k ضرب کنیم واریانس در k^2 ضرب می‌شود

واریانس واحد اندازه‌گیری را مجذور می‌کند. اگر داده‌ها بر حسب سانتی‌متر باشند، واریانس بر حسب سانتی‌متر مربع خواهد بود

گروهی از مشاهدات دارای پراکندگی کمتری خواهد بود که واریانس آنها کوچک باشد

خواص
واریانس

۳- انحراف معیار

انحراف معیار به صورت جذر واریانس محاسبه می‌شود. یعنی

$$S = \sqrt{S^2}$$

۳- انحراف معیار

انحراف معیار همواره بزرگتر یا مساوی صفر است

اگر مقدار ثابت a را به تمام مشاهدات اضافه کنیم انحراف معیار تغییر نمی‌کند

اگر تمام مشاهدات را در مقدار غیر منفی k ضرب کنیم انحراف معیار در k ضرب می‌شود

انحراف معیار واحد اندازه‌گیری را تغییر نمی‌دهد

گروهی از مشاهدات دارای پراکندگی کمتری خواهد بود که انحراف معیار آنها کوچک باشد

خواص
انحراف
معیار

۴- گشتاورها

۴- گشتاورها: برای عدد ثابت a ، گشتاور غیر مرکزی مرتبه r ام حول نقطه a را با m'_r نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$m'_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^r$$

اگر $r = 1$ و $a = 0$ ، در این صورت $m'_1 = \bar{X}$

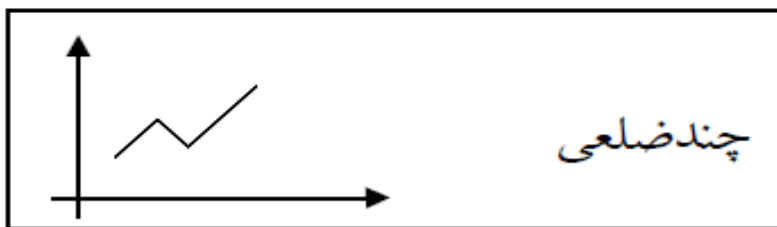
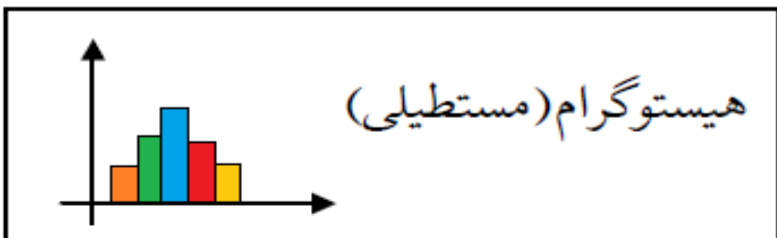
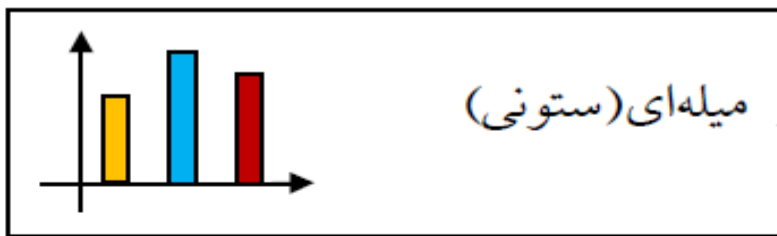
اگر $r = 2$ و $a = \bar{X}$ ، در این صورت $m'_2 = S^2$

۵- ضریب تغییرات

۵- ضریب تغییرات: ضریب تغییرات را با CV نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$CV = \frac{S}{\bar{X}}$$

داده‌هایی همگن‌ترند که ضریب تغییرات آنها کمتر باشند.



نمودارهای
توصیفی

در نمودار دایره‌ای، زاویه‌ها (S_i ها) به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$S_i = \frac{360}{\sum f_i} \times f_i \qquad \sum S_i = 360$$

مثال

۱ – داده‌های زیر مربوط به نمرات درس آمار و احتمال در یک کلاس می‌باشد.

| | | | |
|----|------|------|-------|
| ۸ | ۹/۲۵ | ۱۱ | ۱۳/۲۵ |
| ۱۵ | ۱۷ | ۱۸/۵ | ۲۰ |

تمام شاخصهای مرکزی و پراکندگی را برای این داده‌ها محاسبه کنید.



حل

$$\bar{X} = \frac{8 + 9/25 + 11 + 13/25 + 15 + 17 + 18/5 + 20}{8} = \frac{112}{8} = 14$$

$$G = \sqrt[8]{8 \times 9/25 \times 11 \times 13/25 \times 15 \times 17 \times 18/5 \times 20} = 13/36$$

حل

$$H = \frac{1}{\frac{1}{8} + \frac{1}{9/25} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13/25} + \frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \frac{1}{18/5} + \frac{1}{20}} = 12/71$$

همه داده‌ها نما هستند چون یک بار تکرار شده‌اند.

حل

$$\text{میانہ} = Q_2 = \frac{13/25 + 15}{2} = 14/125$$

$$Q_1 = \frac{9/25 + 11}{2} = 10/125$$

$$Q_3 = \frac{17 + 18/5}{2} = 17/75$$

حل

$$R = 20 - 8 = 12$$

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{8} ((8 - 14)^2 + (9/25 - 14)^2 + (11 - 14)^2 + (13/25 - 14)^2 \\ &+ (15 - 14)^2 + (17 - 14)^2 + (18/5 - 14)^2 + (20 - 14)^2) = \frac{134/375}{8} \\ &= 16/79 \end{aligned}$$

حل

$$S = \sqrt{16/79} = 4/09$$

$$CV = \frac{4/09}{14} = 0/3$$

تمرین

۱ - داده‌های زیر مربوط به نمرات درس ریاضی مهندسی در یک کلاس می‌باشد.

| | | | | |
|-------|------|-------|------|----|
| ۵ | ۸/۵ | ۱۲ | ۱۳/۵ | ۱۵ |
| ۱۶/۲۵ | ۱۷/۵ | ۱۷/۷۵ | ۱۸/۵ | ۲۰ |

تمام شاخص‌های مرکزی و پراکندگی را برای این داده‌ها محاسبه کرده و مفهوم انحراف معیار و ضریب تغییرات را در این داده‌ها تحلیل کنید.