

مدار منطقی

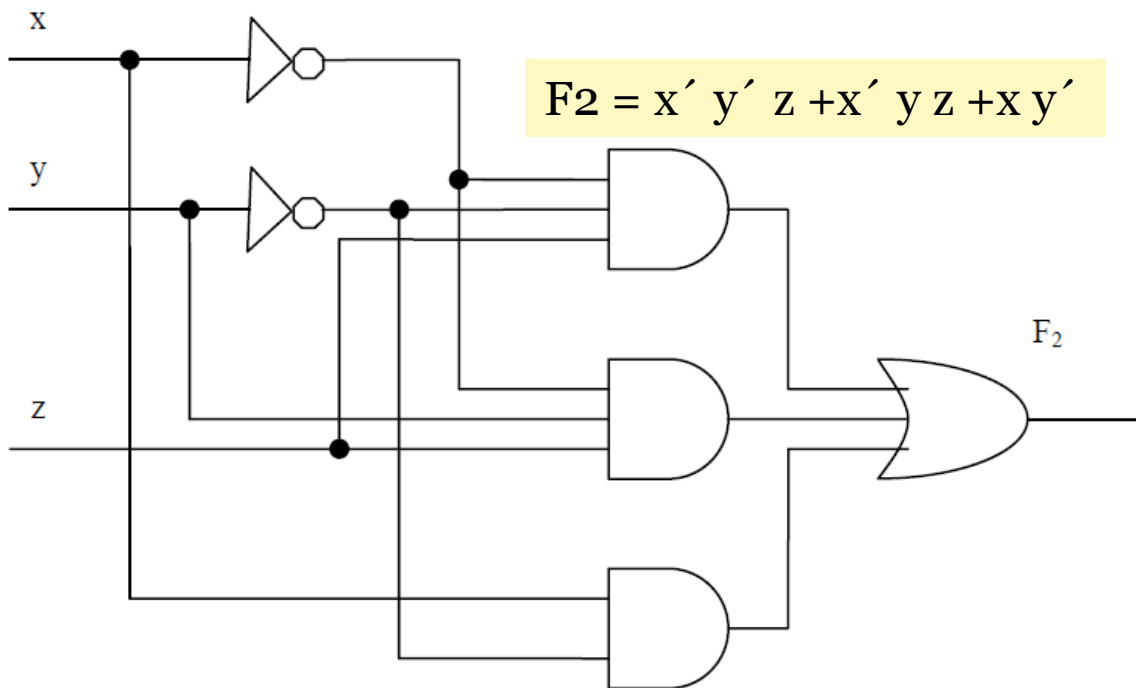


فصل چهارم
ساده کردن عبارات بولی پیچیده

By: A.Abbaszadeh

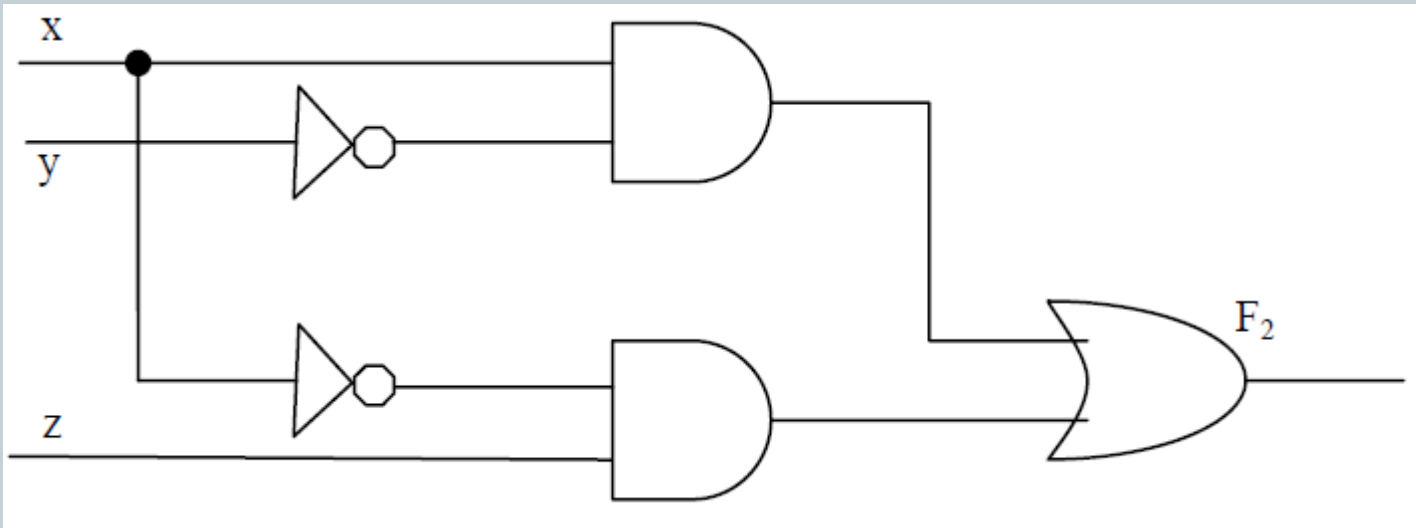
ساده کردن عبارات بولی

- وقتی که یک عبارت بولی با گیت های منطقی پیاده سازی شود، هر جمله به یک گیت نیاز دارد و هر متغیر در جمله یک ورودی به یک گیت است. بنابراین با ساده کردن عبارات، تعداد گیت ها در مدار و تعداد ورودی ها به هر گیت را کاهش دهیم



ساده کردن عبارات بولی

$$F2 = x'y'z + x'yz + xy' = x'z(y' + y) + xy' = x'z + xy'$$



جدول کارنو



- نقشه نموداری است متشکل از مربعات که هر مربع یک مینترم تابع را نشان می دهد.
- چون هر تابع بول را می توان به مجموعی از مینترم ها نشان داد، بنابراین یک تابع بولی در نقشه را می توان با مربعاتی که مینترم های متعلق به آنها در تابع وجود دارد به صورت گرافیکی شناسایی کرد.
- روش نقشه کارنو صرفاً برای توابع دارای دو الی پنج متغیر کاربرد دارد و برای توابع با تعداد متغیر بیشتر قابل استفاده نیست.

نقشه دو متغیره کارنو



		y	
		0	1
x	0	$x'y'$	$x'y$
	1	xy'	xy

m_0	m_1
m_2	m_3

نقشه سه متغیره کارنو



- مینترم ها بر اساس ترتیب دودویی مرتب نشده اند. بلکه ترتیب این است که هنگام عبور از یک ستون به ستون مجاور تنها یک بیت تغییر می کند.
- تغییر یک بیت سبب می شود که دو مینترم کنار هم را براحتی ساده کرد.

$$m_1 + m_3 = x'y'z + x'yz = x'z(y + y') = x'z$$

- بنابراین هر دو مینترمی که در دو مربع مجاور با هم *OR* می شوند سبب حذف تغییری می شود که در دو مینترم با هم متفاوتند.

		y			
		00	01	11	10
x	yz x	0	1	1	0
		$x'y'z'$	$x'y'z$	$x'yz$	$x'yz'$
	1	$xy'z'$	$xy'z$	xyz	xyz'
		z			

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6

نقشه سه متغیره کارنو

$$F(x, y, z) = \Sigma (2, 3, 4, 5)$$

- تابع بولی زیر را ساده کنید.

- ابتدا در هر مربعی که مینترم تابع را نشان دهد، مقدار ۱ قرار می دهیم

- قدم بعدی یافتن مربع های مجاور است

		yz		y	
		00	01	11	10
x	0			1	1
	1	1	1	$x'y$	

xy' (grouping the two 1s in the x=1 row)
 $x'y$ (grouping the two 1s in the y=1 column)

$$F(x, y, z) = x'y + xy'$$

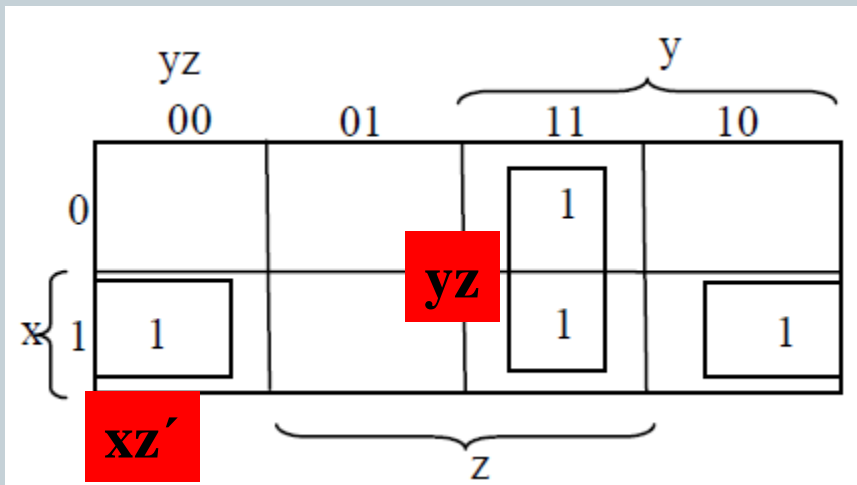
- سمت چپ ترین و راست ترین مربعها نیز مجاور محسوب می شوند. چون فقط یک متغیرشان متفاوت است.

نقشه سه متغیره کارنو



- تابع بول زیر را ساده کنید.

$$F(x, y, z) = \Sigma (3, 4, 6, 7) = xz' + yz$$



نقشه سه متغیره کارنو



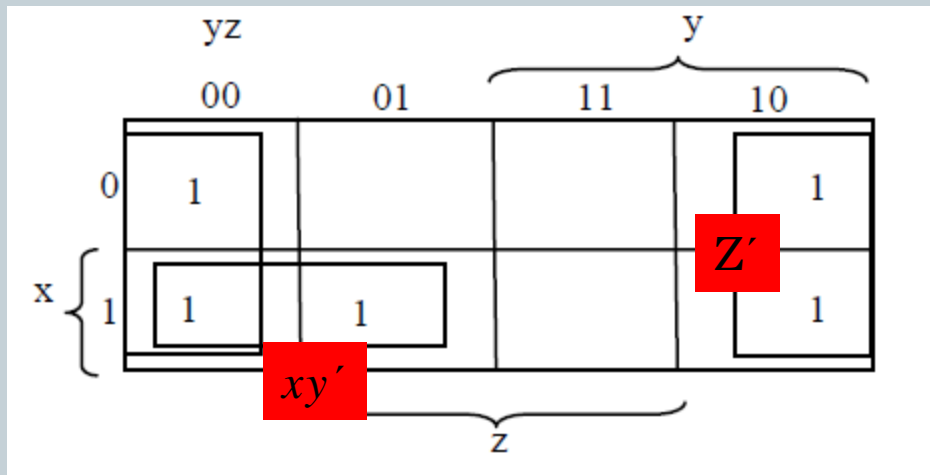
- تعداد مربعات مجاوری که ترکیب می شوند همواره برابر توانی از ۲ می باشد.
- هر چقدر تعداد بیشتری از مربعات همجوار ترکیب شوند جمله حاصلضرب نتیجه، تعداد کمتری لیترال خواهد داشت.
- یک مربع یک مینترم را نمایش می دهد و دارای سه لیترال است.
- دو مربع مجاور یک جمله دو لیترال را نشان می دهند.
- چهار مربع همجوار یک جمله با یک لیترال را نشان می دهند.
- هشت مربع همجوار که تمام نقشه را می پوشانند همواره تابع ۱ را تولید می کنند.

نقشه سه متغیره کارنو



- تابع بول زیر را ساده کنید.

$$F(x, y, z) = \Sigma (0, 2, 4, 5, 6) = z' + xy'$$



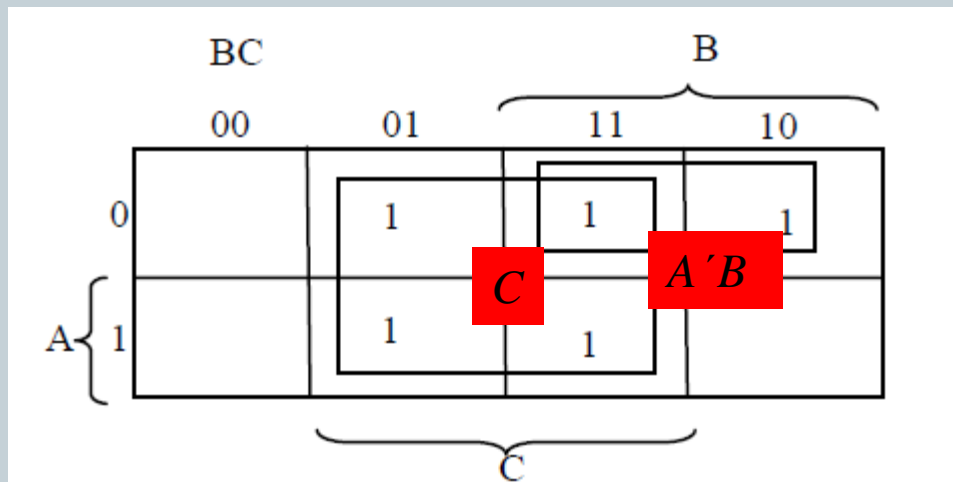
نقشه سه متغیره کارنو



• تابع بول زیر را ساده کنید.

$$F = A'C + A'B + AB'C + BC$$

• سه جمله ضرب در عبارت دو لیترال دارند و در نقشه سه متغیره، هر یک با دو مربع نشان داده شده اند.



$$F = A'B + C$$

نقشه سه متغیره کارنو



		y			
	yz	00	01	11	10
wx	00	$w'x'y'z'$	$w'x'y'z$	$w'x'yz$	$w'x'yz'$
	01	$w'xy'z'$	$w'xy'z$	$w'xyz$	$w'xyz'$
	11	$wxy'z'$	$wxy'z$	$wxyz$	$wxyz'$
	10	$wx'y'z'$	$wx'y'z$	$wx'yz$	$wx'yz'$
w		x			
		z			
		(ب)			

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6
m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

(الف)

نقشه سه متغیره کارنو



- یک مربع یک مینترم را نمایش می دهد، و جمله آن چهار لیترالی است.
- دو مربع همجوار یک جمله سه لیترالی را می سازند.
- چهار مربع همجوار یک جمله دو لیترالی را نشان می دهند.
- هشت مربع همجوار یک جمله یک لیترالی را نمایش می دهند.
- شانزده مربع همجوار تابعی برابر ۱ را تولید می کنند.
- هیچ ترکیب دیگری از مربع ها نمی تواند تابع را ساده کند.

نقشه چهار متغیره کارنو



• تابع بول زیر را ساده کنید.

$$F(w, x, y, z) = \Sigma (0, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 13, 14)$$

wx \ yz	y			
	00	01	11	10
00	1	1		1
01	1	1		1
11	1	1		1
10	1	1		

The table is annotated with groupings: a bracket labeled 'x' groups the rightmost column (yz=10); a bracket labeled 'z' groups the bottom two rows (wx=11, 10); and a bracket labeled 'y' groups the top two columns (yz=11, 10). The '1's in the table correspond to the minterms listed in the equation above.

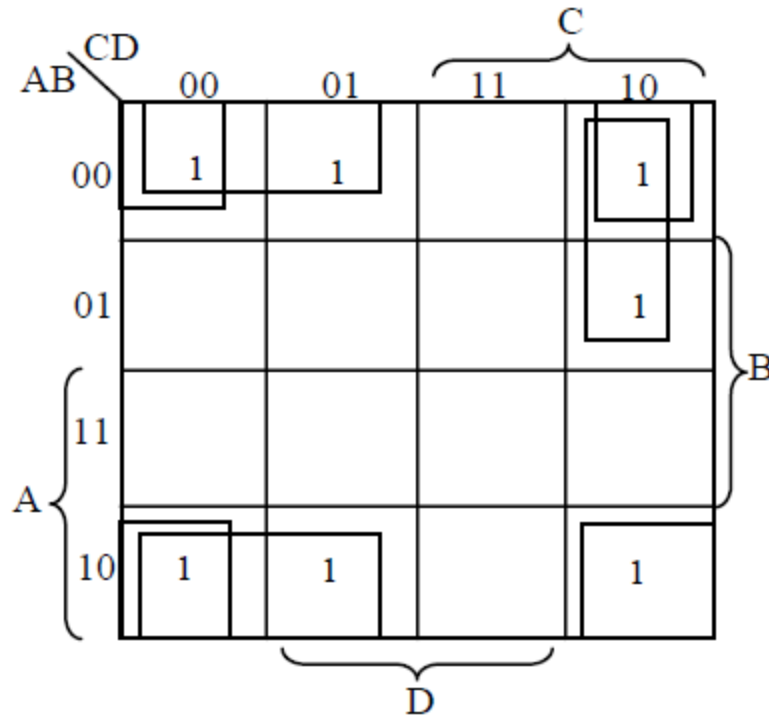
$$F = y' + w'z' + xz'$$

نقشه چهارمتغیره کارنو

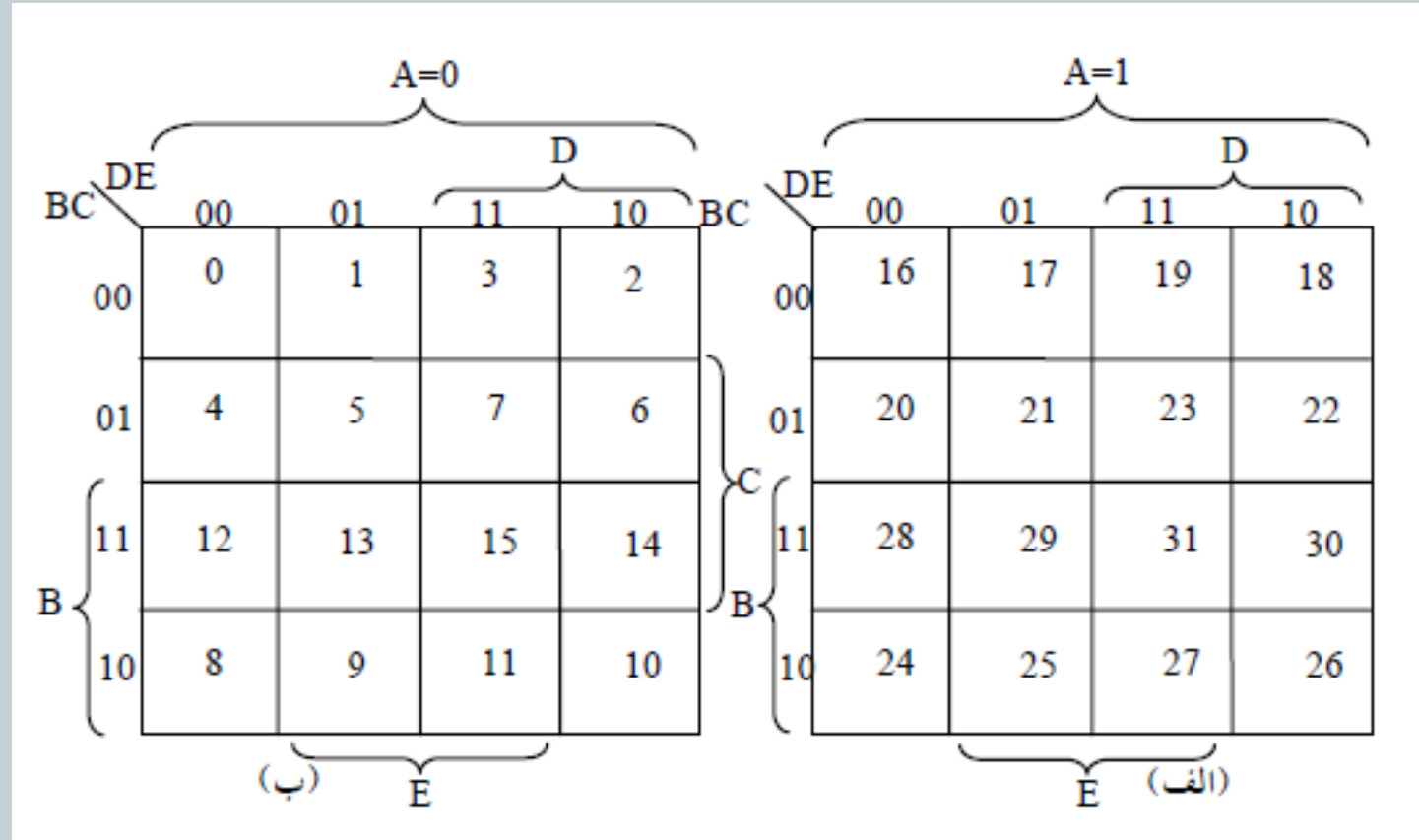


• تابع زیر را ساده کنید. $F = A'B'C' + B'CD' + A'BCD' + AB'C'$

$$F = B'D' + B'C' + A'CD'$$



نقشه پنج متغیره کارنو



نقشه پنج متغیره کارنو

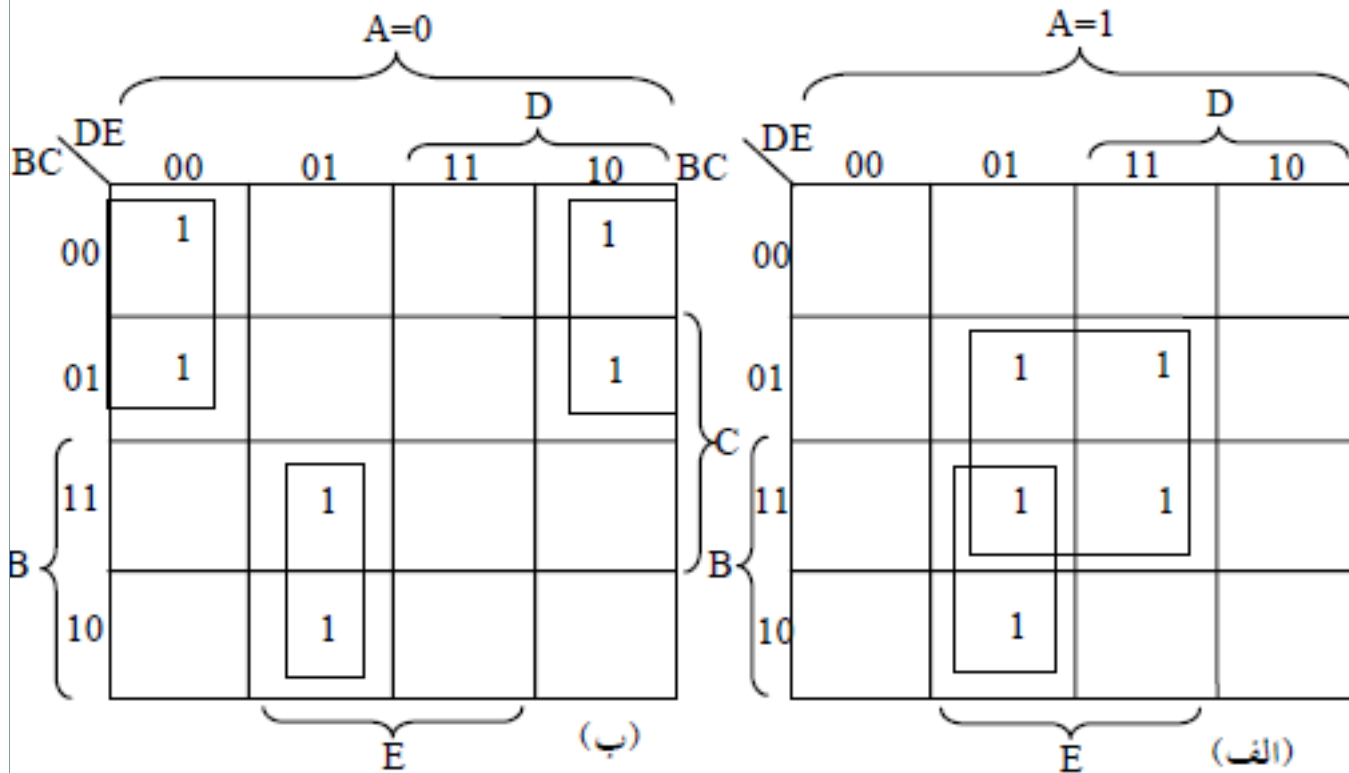


- از دو نقشه چهار متغیره تشکیل شده که در اولی متغیر اول ($A=0$) و در دومی ($A=0$)
- مینترمهای ۰ تا ۱۵ به $A=0$ و مینترمهای ۱۶ تا ۳۱ به $A=1$ مربوط می شوند.
- وقتی دو جدول جداگانه بررسی می شوند همسایگیهای تعریف شده قبلی را دارند و هر مربع در نقشه اول با مربع نظیر خود در دومی همسایه محسوب می شود.

نقشه پنج متغیره کارنو



• تابع بول زیر را ساده کنید. $F(A,B,C,D,E) = \Sigma(0, 2, 4, 6, 9, 13, 21, 23, 25, 29, 31)$



$$F = A'B'E' + BD'E + ACE$$

حالات بی اهمیت



- توابعی که در ازاء ترکیبی از ورودی ها خروجی های نامشخص دارند، تابع غیر کامل نامیده می شوند
- همه مینترم های نا مشخص در تابع را حالات بی اهمیت میخوانیم.
- به عنوان نمونه کد BCD چهار ورودی دارد ولی ۱۰ حالت خروجی پس ۶ حالت بی اهمیت دارد. یعنی به ازاء ورودیهای ۱۰۱۰ تا ۱۱۱۱ یک یا صفر بودن بیتهای خروجی بی اهمیت است.
- از حالات بی اهمیت می توان برای ساده سازی بیشتر عبارت بول در یک نقشه استفاده کرد.
- در ساده سازی تابع می توانیم با توجه به ساده ترین فرم ممکن برای تابع، به حالات بی اهمیت ۰ یا ۱ دهیم.

ساده سازی با ضرب حاصل جمع ها



- ۱ های واقع در مربع های نقشه نشانگر مینترم های تابع است.
- مینترم هایی که در تابع ذکر نشوند متمم تابع را بیانگرند.
- متمم یک تابع به وسیله مربع هایی که با ۱ علامت زنی نشده اند بیان می گردد.
- اگر در مربع های خالی ۰ قرار داده و آنها را با روش مربع های همجوار ترکیب کنیم عبارت ساده شده متمم تابع یعنی F' را به دست خواهیم آورد.
- متمم F' به ما F را باز می گرداند. به دلیل عمومیت تئوری دموورگان تابع حاصل به طور خودکار به صورت ضرب حاصل جمع هاست.

ساده سازی با ضرب حاصل جمع ها



- تابع بولي زیر را بصورت ضرب حاصل جمع ها ساده کنید.

$$F(A, B, C, D) = \Sigma (0, 1, 2, 5, 8, 9, 10)$$

AB \ CD	C			
	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	1	0	0
11	0	0	0	0
10	1	1	0	1

Diagram illustrating the Karnaugh map for the function $F(A, B, C, D) = \Sigma (0, 1, 2, 5, 8, 9, 10)$. The map is a 4x4 grid with rows labeled AB (00, 01, 11, 10) and columns labeled CD (00, 01, 11, 10). The function value is 1 for cells (00,00), (00,01), (00,10), (01,01), (10,00), (10,01), (10,10), and (10,10). The function value is 0 for cells (00,11), (01,00), (01,11), (01,10), (11,00), (11,01), (11,10), (11,11), (10,11), and (10,11). The map is grouped into four prime implicants: AB (top row), CD (top row), BD' (right column), and $(A' + B')$ (left column).

$$F' = AB + CD + BD'$$

$$F = (A' + B')(C' + D')(B' + D)$$

حالات بی اهمیت



- تابع بول زیر $F(w, x, y, z) = \Sigma (1, 3, 7, 11, 15)$ که حالات بی اهمیت زیر را دارا می باشد، ساده کنید. $d(w, x, y, z) = \Sigma (0, 2, 5)$.

		D				
	yz	00	01	11	10	
wx	00	X	1	1	X	
	01	0	X	1	0	}
	11	0	0	1	0	
w	10	0	0	1	0	
		z				
		$F = yz + w'z$ (ب)				

		y				
	yz	00	01	11	10	
wx	00	X	1	1	X	
	01	0	X	1	0	}
	11	0	0	1	0	
w	10	0	0	1	0	
		z				
		$F = yz + w'x'$ (الف)				

حالات بی اهمیت



- در تابع بالا به دو شکل از حالات بی اهمیت جهت ساده سازی استفاده شده است.