

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه فنی و حرفه‌ای

ریاضی کاربردی

شیرا دیدهبان



دانشگاه فنی و حرفه‌ای

یادآوری فرمول‌های انتگرال

ریاضی کاربردی
دیدهبان

$$\int k dx = kx + C$$

$$\int dx = \int 1 dx = x + C$$

$$\int 5 dx = 5x + C$$

$$\int -dx = \int -1 dx = -x + C$$



دانشگاه فنی و حرفه‌ای

یادآوری فرمول‌های انتگرال

ریاضی کاربردی
دیدهبان

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

$$\int x dx = \frac{1}{2} x^2 + C$$

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 + C$$

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} x^{\frac{1}{2} + 1} + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$$



دانشگاه فنی و حرفه‌ای

یادآوری فرمول‌های انتگرال

ریاضی کاربردی
دیدهبان

$$\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{dx}{x-3} = \ln|x-3| + C$$

$$\int \frac{dx}{x+5} = \ln|x+5| + C$$



دانشگاه فنی و حرفه‌ای

یادآوری فرمول‌های انتگرال

ریاضی کاربردی
دیدهبان

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

$$\int e^{8x} dx = \frac{1}{8} e^{8x} + C$$



دانشگاه فنی و حرفه‌ای

یادآوری فرمول‌های انتگرال

ریاضی کاربردی
دیدهبان

$$\int \sin ax \, dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + C$$

$$\int \sin 5x \, dx = -\frac{1}{5} \cos 5x + C$$



دانشگاه فنی و حرفه‌ای

یادآوری فرمول‌های انتگرال

ریاضی کاربردی
دیدهبان

$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$$

$$\int \cos 5x dx = \frac{1}{5} \sin 5x + C$$



دانشگاه فنی و حرفه‌ای

یادآوری فرمول‌های انتگرال

ریاضی کاربردی
دیدهبان

روش تغییر متغیر برای محاسبه انتگرال نامعین:
برای حل

$$\int f(g(x))g'(x)dx$$

با تغییر متغیر $u = g(x)$ و در نتیجه $du = g'(x)dx$ انتگرال به متغیر u تبدیل می‌شود و پس از حل، مقدار u جایگذاری می‌گردد.



دانشگاه فنی و حرفه‌ای

یادآوری فرمول‌های انتگرال

ریاضی کاربردی
دیدهبان

مثال: انتگرال $\int \sqrt{x-1} dx$ را محاسبه کنید.

$$u = x - 1 \Rightarrow du = dx$$

$$\int \sqrt{x-1} dx = \int \sqrt{u} du = \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C$$



دانشگاه فنی و حرفه‌ای

یادآوری فرمول‌های انتگرال

ریاضی کاربردی
دیدهبان

مثال: انتگرال $\int \sin x \cos x dx$ را محاسبه کنید.

$$u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx$$

$$\begin{aligned}\int \sin x \cos x dx &= \int u du = \frac{1}{2} u^2 + C \\ &= \frac{1}{2} (\sin x)^2 + C\end{aligned}$$



دانشگاه فنی و حرفه‌ای

یادآوری فرمول‌های انتگرال

ریاضی کاربردی
دیدهبان

مثال: انتگرال $\int \frac{xdx}{x^2}$ را محاسبه کنید.

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx \Rightarrow xdx = \frac{1}{2} du$$

$$\int \frac{xdx}{x^2} = \int \frac{1}{2} \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \text{Ln}|u| + C$$

$$= \frac{1}{2} \text{Ln}|x^2| + C$$



قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

ریاضی کاربردی
دیده بان

دانشگاه فنی و حرفه‌ای

اگر f یک تابع پیوسته و F یک تابع اولیه آن باشد، آنگاه داریم:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

مثال:

$$\int_{-1}^1 3x^2 dx = x^3 \Big|_{-1}^1 = 1^3 - (-1)^3 = 1 + 1 = 2$$



دانشگاه فنی و حرفه‌ای

قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

ریاضی کاربردی
دیده بان

مثال:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin 5x dx = -\frac{1}{5} \cos 5x \Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$-\frac{1}{5} (\cos 5\pi - \cos(-5\pi)) = -\frac{1}{5} (-1 - (-1)) = 0$$



دانشگاه فنی و حرفه‌ای

مقدار متوسط یک تابع

ریاضی کاربردی
دیدهبان

مقدار متوسط تابع f در بازه $[a, b]$ از فرمول زیر بدست می‌آید.

$$y_{av} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$



دانشگاه فنی و حرفه‌ای

مقدار متوسط یک تابع

ریاضی کاربردی
دیدهبان

مثال: مقدار متوسط تابع $f(x) = \sqrt{x}$ از صفر تا 4 را محاسبه کنید.

$$y_{av} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{4-0} \int_0^4 \sqrt{x} dx =$$

$$\frac{1}{4} \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 \right) = \frac{2}{12} \left(4^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{1}{6} (8) = \frac{4}{3}$$



دانشگاه فنی و حرفه‌ای

مقدار متوسط یک تابع

ریاضی کاربردی
دیدهبان

جریان الکتریکی برق شهر، جریان متناوبی است که معادله آن را می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

$$i = I \sin \omega t$$

جریان i بر حسب آمپر به صورت تابعی از زمان بر حسب ثانیه بیان شده است.

I مقدار جریان ماکسیمم و $\frac{2\pi}{\omega}$ دوره تناوب است.

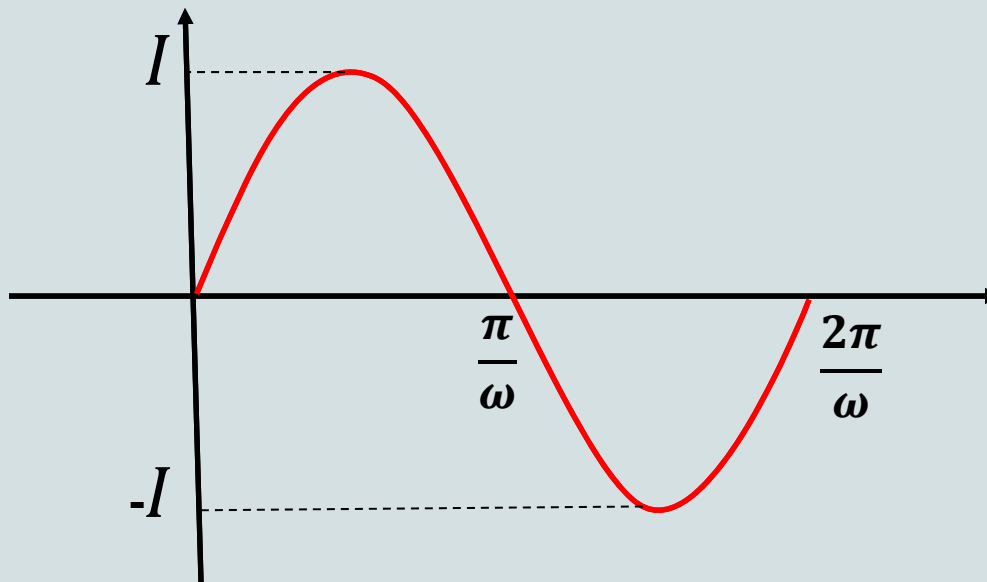


دانشگاه فنی و حرفه‌ای

مقدار متوسط یک تابع

ریاضی کاربردی
دیده بان

نمودار جریان الکتریکی برق شهر به صورت زیر است:





دانشگاه فنی و حرفه‌ای

مقدار متوسط یک تابع

ریاضی کاربردی
دیده‌بان

مقدار متوسط i در نیم سیکل به صورت زیر است:

$$i_{av} = \frac{1}{\frac{\pi}{\omega} - 0} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} I \sin \omega t dt = \frac{I\omega}{\pi} \left[-\frac{\cos \omega t}{\omega} \right]_0^{\frac{\pi}{\omega}} = \frac{2}{\pi} I$$



دانشگاه فنی و حرفه‌ای

مقدار متوسط یک تابع

ریاضی کاربردی
دیدهبان

مقدار متوسط i در سیکل کامل به صورت زیر است:

$$i_{av} = \frac{1}{\frac{2\pi}{\omega} - 0} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} I \sin \omega t dt = \frac{I\omega}{\pi} \left[-\frac{\cos \omega t}{\omega} \right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}} = 0$$



دانشگاه فنی و حرفه‌ای

مقدار متوسط یک تابع

ریاضی کاربردی
دیدهبان

جریان مؤثر را با I_{rms} نشان داده و به صورت جذر مقدار متوسط مربع جریان تعریف می‌کنیم.

$$I_{rms} = \sqrt{(i^2)_{av}}$$

rms مخفف Root mean square به معنی "جذر مقدار متوسط مربع" است.



دانشگاه فنی و حرفه‌ای

مقدار متوسط یک تابع

ریاضی کاربردی
دیدهبان

برای $i = I \sin \omega t$ جریان مؤثر به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$i^2 = I^2 \sin^2 \omega t$$

$$(i^2)_{av} = \frac{1}{\frac{2\pi}{\omega} - 0} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} I^2 \sin^2 \omega t dt$$

$$= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} I^2 \sin^2 \omega t dt$$



دانشگاه فنی و حرفه‌ای

مقدار متوسط یک تابع

ریاضی کاربردی
دیدهبان

اما بنابه روابط مثلثاتی داریم:

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}$$

لذا داریم:

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} I^2 \sin^2 \omega t dt = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} I^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2\omega t}{2} \right) dt$$



دانشگاه فنی و حرفه‌ای

مقدار متوسط یک تابع

ریاضی کاربردی
دیدهبان

$$= \frac{I^2 \omega}{2\pi} \left(\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{1}{2} dt - \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{\cos 2\omega t}{2} dt \right)$$

$$= \frac{I^2 \omega}{2\pi} \left(\frac{1}{2} t - \frac{1}{4} \sin 2\omega t \right) \Big|_0^{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{I^2 \omega}{2\pi} \times \frac{\pi}{\omega} = \frac{I^2}{2}$$

پس

$$I_{rms} = \frac{I}{\sqrt{2}}$$



دانشگاه فنی و حرفه‌ای

مقدار متوسط یک تابع

ریاضی کاربردی
دیدهبان

مثال: اگر جریان الکتریکی برق شهر 20 آمپر (rms) باشد، مقدار
ماکسیمم این جریان چقدر است؟

$$I_{rms} = \frac{I}{\sqrt{2}} \Rightarrow 20 = \frac{I}{\sqrt{2}} \Rightarrow I = 20\sqrt{2} = 28.28$$