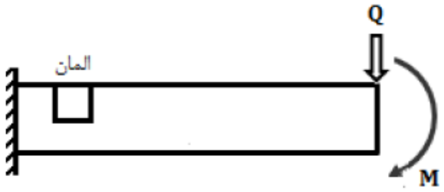
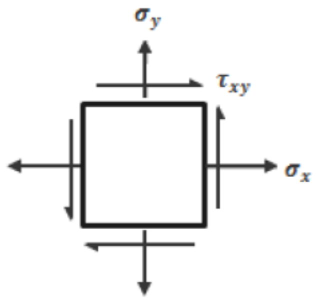
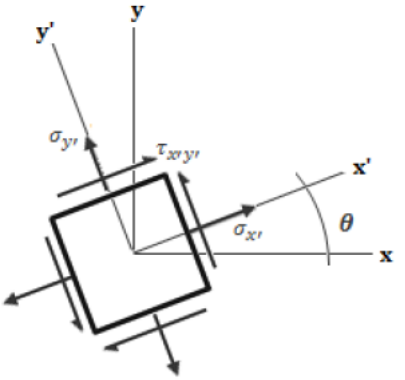
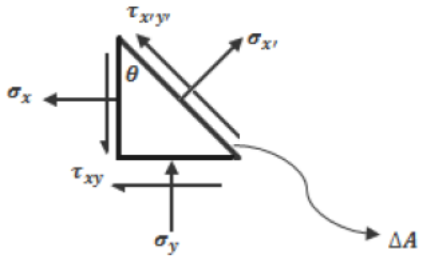
جلسه دوم (اجزای ماشین کاردانی)

۴. تبدیل تنش صفحه ای – حالت کلی:









در اینجا هدف این است که صفحه ای را به دست آوریم که حساس است و تنش های کششی یا برشی در آن بیشینه است.

برای این کار، المان را به اندازه θ دوران می دهیم و معادلات تعادل را برای المان می نویسیم:

$$\sum F_{x'} = 0 \rightarrow \sigma_{x'}.\Delta A = \sigma_x(\Delta A\cos\theta)\cos\theta + \tau_{xy}(\Delta A\cos\theta)\sin\theta + \sigma_y(\Delta A\sin\theta)\sin\theta + \tau_{xy}(\Delta A\sin\theta)\cos\theta$$

$$\sum F_{y'} = 0 \rightarrow \tau_{x'y'}.\Delta A = -\sigma_x(\Delta A\cos\theta)\sin\theta + \tau_{xy}(\Delta A\cos\theta)\sin\theta + \sigma_y(\Delta A\sin\theta)\cos\theta - \tau_{xy}(\Delta A\sin\theta)\cos\theta$$

با ساده سازی معادلات تعادل بالا خواهیم داشت:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

برای به دست آوردن $\sigma_{y'}$ و $\tau_{y'x'}$ در فرمول های بالا، به جای θ، مقدار $\frac{\pi}{2} + \theta$ را قرار می دهیم:

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\tau_{y'x'} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \tau_{xy}\cos 2\theta$$

۵. تنش های اصلی (Principal Stresses):

برای پیدا کردن صفحه اصلی (صفحه ای که تنش های اصلی در آن است) از $\sigma_{x'}$نسبت به θ مشتق می گیریم. (تذکر: به مقادیر ماکزیمم و مینیمم تنش، تنش اصلی گفته می شود)

$$\frac{d\sigma_{x'}}{d\theta} = 0 \rightarrow \tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \rightarrow \begin{cases} \theta_{p1} \\ \theta_{p2} \end{cases}$$

با جایگذاری θ_{p1} و θ_{p2} در معادله $\sigma_{x'}$، تنش های محوری اصلی نیز بدست می آیند.

$$\sigma_1 = \sigma_{max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = \sigma_{min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}^2}$$

برای پیدا کردن صفحه ای که در آن تنش برشی ماکزیمم است، از $\tau_{x'y'}$ نسبت به θ مشتق می گیریم:

$$\frac{d\tau_{x'y'}}{d\theta} = 0 \rightarrow \tan 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

نکته: $\tan 2\theta_s$ معکوس و قرینه $\tan 2\theta_p$ است. یعنی بر هم عمود هستند. پس θ_s و θ_p با هم $\frac{\pi}{4}^{rad}$ اختلاف دارند.

برای به دست آوردن مقدار بیشینه تنش برشی، مقدار θ_s را در فرمول $\tau_{x'y'}$ جایگذاری می کنیم.

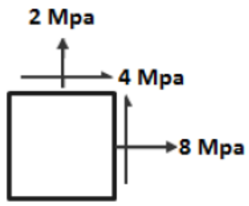
$$\tau_{x'y'max} = \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}^2}$$

توجه: به فرمول های $\sigma_{x'}$ و $\tau_{x'y'}$ فرمول های مثلثاتی تبدیل تنش گفته می شود

✓ مثال: فرض کنید المانی تحت تنش های زیر داده شده باشد. مطلوبست محاسبه تنش های اصلی و جهات آن.

$$\tau_{xy} = 4\ Mpa;\quad \sigma_y = 2\ Mpa;\quad \sigma_x = 8\ Mpa;$$

حل:



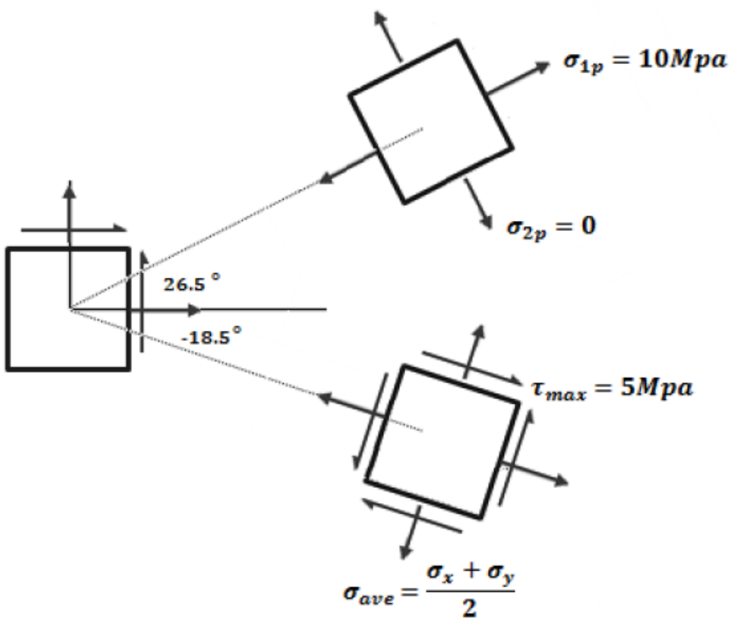
$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{8+2}{2} \pm \sqrt{3^2 + 4^2} \rightarrow \sigma_1 = 10\text{Mpa},\qquad \sigma_2 = 0$$

$$\tau_{max} = \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_2}{2})^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\text{Mpa}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2\times 4}{8-2} = \frac{4}{3} \rightarrow \theta_{p1} = 26.5^\circ, \theta_{p2} = 116.5^\circ$$

$$\tan 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = -\frac{2-8}{2\times 4} = -\frac{3}{4} \rightarrow \theta_{s1} = -18.5^\circ, \theta_{s2} = 71.5^\circ$$



۶. تعیین علامت تنش ها برای استفاده در فرمول مثلثاتی تنش:

- تعیین علامت تنش های محوری (Normal Stresses):

تنش های کششی را مثبت (+) و تنش های فشاری را منفی (-) در نظر می گیریم.

- تعیین علامت تنش های برشی (shear Stresses):

صفحه ای از المان را که بردار یکه ی آن در جهت مثبت یکی از محورها باشد، صفحه مثبت گوییم و صفحه ای از المان را که بردار یکه ی آن در جهت منفی یکی از محورها باشد، صفحه منفی گوییم.

جهت تنش برشی را در صورتی که در جهت مثبت یکی از محورها باشد، مثبت در نظر می گیریم و در صورتی که جهت آن در راستای منفی یکی از محورها باشد، علامت آن را منفی در نظر می گیریم. با استفاده از جدول زیر علامت تنش برشی را تعیین می کنیم.

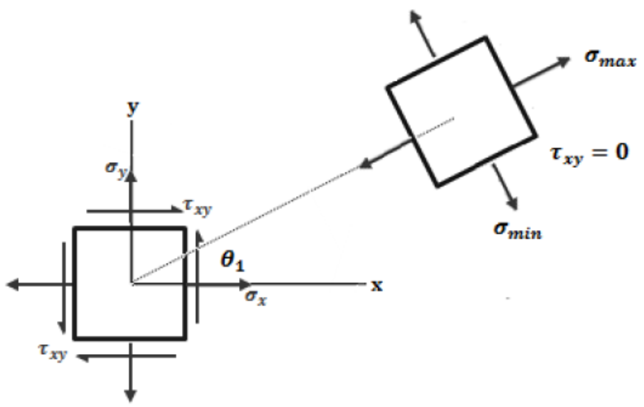
علامت تنش برشی	➔ علامت جهت تنش برشی	علامت صفحه ای که تنش برشی روی آن است
+	+	+
−	−	+
−	+	−
+	−	−

تذکر: توجه شود که در یک المان، جهت تنش های برشی در یک گوشه یا نزدیک شونده است یا دور شونده.

۷. رسم دایره ی تنش مور:

در عمل، دایره تنش مور به طور وسیعی برای تبدیل تنش ها بکار می رود. این روش وقتی با ارزش است که ساده و سریع باشد. به عنوان کمک در هنگام استفاده از این تکنیک، روش پیشنهادی به صورت گام به گام در زیر ذکر می شود.

- گام۱- یک طرح از جزء سطحی (المانی) که تنش های قائم و برشی برای آن معلوم است و این تنشها در جهت صحیحشان بر روی المان نشان داده شده اند، رسم کنید.



➢ گام۲- یک دستگاه مختصات متعامد که محور افقی آن نشان دهنده تنش قائم و محور قائم آن نشان دهنده ی تنش برشی می باشد رسم کنید. جهت مثبت محورها معمولا به طرف راست و بالا در نظر گرفته می شوند.

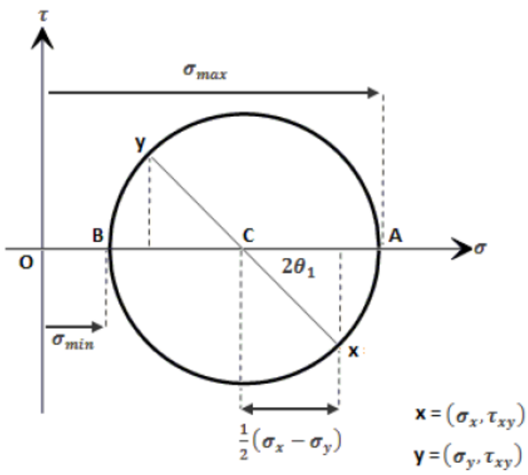
➢ گام۳- مرکز دایره را مشخص کنید. مرکز دایره روی محور افقی و به فاصله ی ${\sigma_x + \sigma_y}/{2}$ از مبدا مختصات قرار دارد. تنش های کششی، مثبت و تنش های فشاری، منفی در نظر گرفته می شوند.

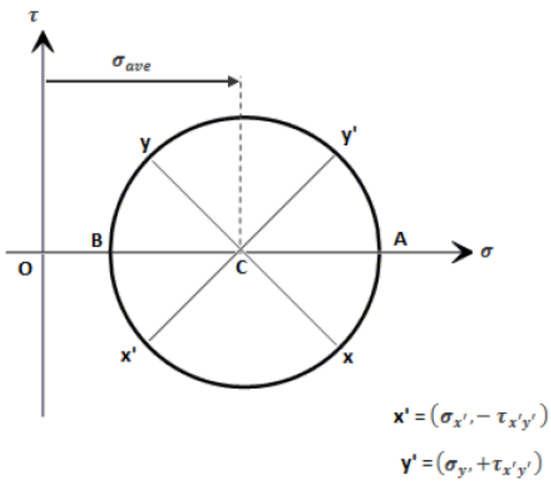
$$oc = \sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

➢ گام۴- نقطه X به مختصات (σ_x, τ_{xy}) و نقطه Y به مختصات (σ_y, τ_{xy}) را روی دستگاه مختصات مشخص کنید. علامت σ_x و σ_y وقتی مثبت است که تنش های مزبور کششی، و در صورتی منفی است که فشاری باشند. علامت τ_{xy} مثبت است اگر المان را در جهت ساعتگرد بچرخاند و منفی است اگر المان را در جهت پادساعتگرد بچرخاند.

➢ گام۵- اگر نقطه X را به نقطه Y وصل کنیم، محل تقاطع آن با محور σ باید منطبق بر مرکز دایره باشد. دایره ای به مرکز c و شعاع cX رسم می کنیم که همان دایره مور است.طول شعاع cX که به عنوان مبدا اندازه گیری های زاویه در نظر گرفته می شود، از رابطه زیر بدست می آید.

$$cX = R = \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}^2}$$





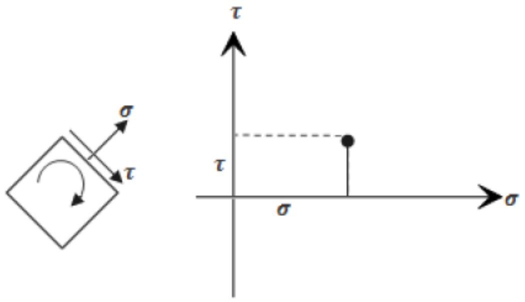
➢ گام۶- دایره تنش در دو نقطه A و B، محور افقی را قطع می کند که فاصله oA نشان دهنده تنش حداکثر و فاصله oB نشان دهنده تنش حداقل می باشد.

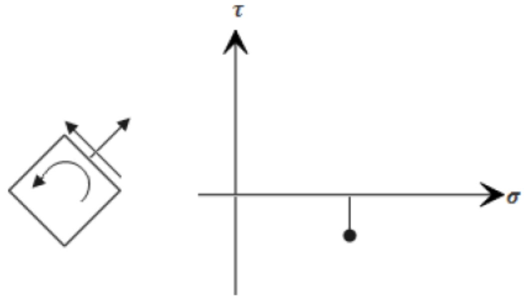
$$\sigma_{max} = \sigma_{ave} + R, \qquad \sigma_{min} = \sigma_{ave} - R$$

۸. قرارداد علامت تنش برشی در دایره تنش مور:

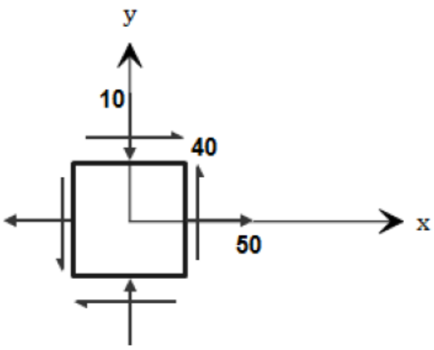
وقتی که تنش برشی موثر بر یک وجه معلوم تمایل به دوران المان در جهت عقربه های ساعت را داراست، نقطه ی مربوط به این وجه بر روی دایره مور در بالای محور افقی σ قرار دارد. در مقابل، وقتی که تنش برشی موثر بر یک وجه معلوم، تمایل به دوران المان در جهت خلاف عقربه های ساعت را داراست، نقطه ی مربوط به این وجه در پایین محور افقی قرار می گیرد. قانون فوق را با حفظ کردن جمله زیر می توان در خاطر سپرد:

" ساعت همیشه در بالای دیوار قرار دارد"





- ✓ مثال: برای حالت تنش نشان داده شده در شکل زیر:



الف) دایره مور را رسم کنید ب) تنش های اصلی را پیدا کنید پ) تنش برشی حداکثر و تنش قائم مربوط به آن را به دست آورید

الف: رسم دایره ی مور

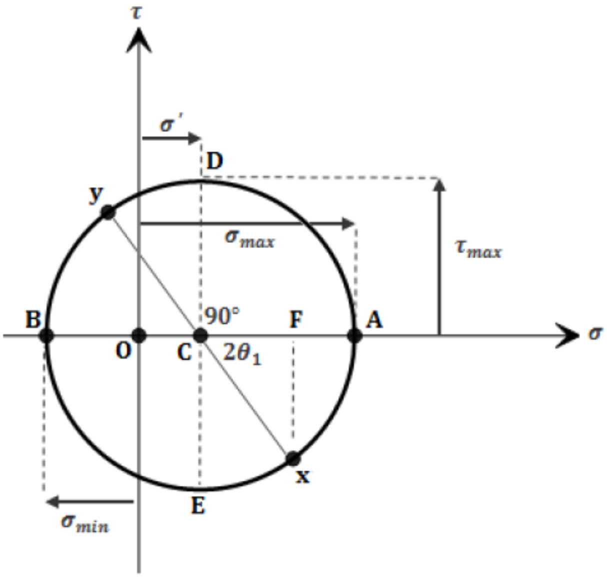
با توجه به شکل، دیده می شود که تنش قائم موثر بر وجه سمت راست المان که در امتداد محور xها می باشد، کششی است (مثبت) و تنش برشی موثر بر همان سطح، المان را در جهت خلاف گردش عقربه های ساعت می چرخاند (منفی)، در نتیجه نقطه های $X(\sigma_x, \tau_{xy})$ و $Y(\sigma_y, \tau_{xy})$ به صورت $X(50, -40)$ و $Y(-10,40)$ در می آیند. با رسم خط XY، مرکز دایره مور (c) بدست می آید. طول آن مساوی است با:

$$\sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{50 + (-10)}{2} = 20\,N/mm^2$$

$$cF = 50 - 20 = 30\,N/mm^2\,, \qquad Fx = 40\,N/mm^2$$

در نتیجه شعاع دایره مور برابر است با:

$$R = cx = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50\,N/mm^2$$



$\sigma_{max} = 70$

$\sigma_{min} = -30$

$\tau_{max} = 50$

$R = 50$

$x\,(50, -40)$ $y\,(-10, 40)$

$2\theta_1 = 53.1°$

ب: صفحات اصلی و تنش های اصلی:

$$\sigma_{max} = oA = oc + cA = 20 + 50 = 70\,N/mm^2$$

$$\sigma_{min} = oB = oc + Bc = 20 - 50 = -30\,N/mm^2$$

زاویه Acx نشان دهنده ی $2\theta_1$ است:

$$\tan 2\theta_1 = \frac{Fx}{CF} = \frac{40}{30} \rightarrow 2\theta_1 = 53.1^{\circ} \rightarrow \theta_1 = 26.6^{\circ}$$

پ: تنش برشی حداکثر

$$\tau_{max} = R = 50\,N/mm^2 , \sigma' = \sigma_{ave} = 20\,N/mm^2$$

پایان جلسه دوم