جلسه دوم(اجزای ماشین کارشناسی)

۴. نظریه ی انرژی واپیچش (فون مایسز):

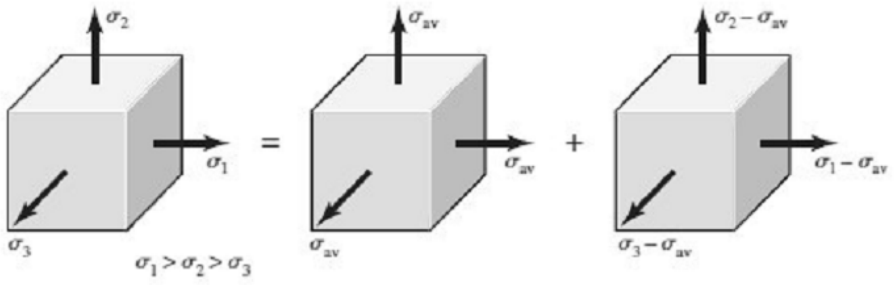
بر مبنای مفاهیم انرژی معیار تسلیم بسیار مقبول دیگری برای مصالح ایزوتروپیک و شکل پذیر تعریف می شود. در این روش انرژی کل ارتجاعی به دو قسمت تقسیم می شود. قسمتی که مربوط به تغییرات حجمی مصالح است و قسمتی که باعث تغییر شکل برشی می شود. با مساوی قرار دادن انرژی تغییر شکل برشی نقطه ی تسلیم در کشش ساده با انرژی تغییر شکل برشی تحت تنش مرکب، معیار تسلیم برای تنش های مرکب به دست می آید.

به منظور تعیین رابطه ای برای نشان دادن شرایط تسلیم تحت تنش های مرکب، از اصل روی هم گذاری تنش استفاده می کنیم. برای مثال می توان این طور در نظر گرفت که تانسور تنش سه تنش اصلی σ_1 و σ_2 و σ_3 از ترکیب دو تا تانسور تشکیل شده است. عناصر یک تانسور به صورت تنش متوسط تعریف می شوند.

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

عناصر تانسور دیگر به ترتیب $(\sigma_1 - \bar{\sigma})$ و $(\sigma_2 - \bar{\sigma})$ و$(\sigma_3 - \bar{\sigma})$ می باشند. با نوشتن بیان فوق به صورت نمایش ماتریسی، داریم:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_1 - \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \bar{\sigma} \end{bmatrix}$$



در حالت تنش سه بعدی، دایره ی مور برای مولفه های تانسور وسط تبدیل به نقطه ای به طول $\bar{\sigma}$ در روی محور σ می شود. بنابراین تنش های مربوط به این تانسور در هر امتداد دلخواه یکسان می باشند. چون عامل تغییر شکل در مواد نرم تنش برشی است، تغییر شکل هم در این تانسور نخواهیم داشت و فقط تغییر حجم خواهیم داشت.

$$U_{\text{total}} = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}{18K} + \frac{1}{6G}(\sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2 + \sigma_3{}^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3)$$

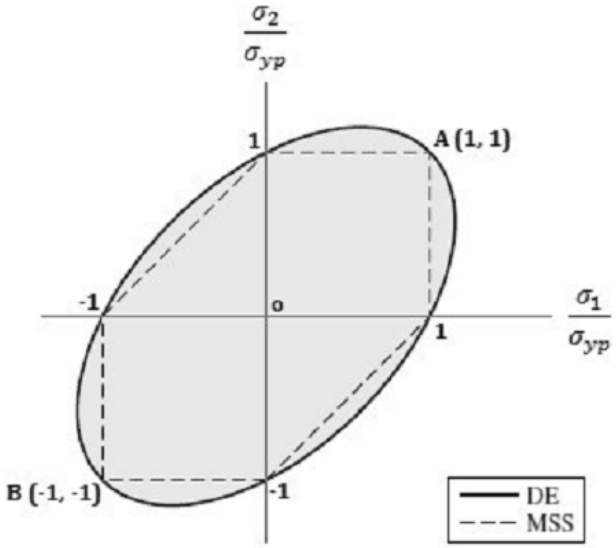
$$U_d = \frac{1}{6G}(\sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2 + \sigma_3{}^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3)$$

U_d برای تست کشش $(\sigma_2 = \sigma_3 = 0)$ عبارت است از:

$$U_d = \frac{1}{6G}(\sigma_1)^2 = \frac{{s_y}^2}{6G} \xrightarrow{\text{معیار فون مایسز}} (\sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2 + \sigma_3{}^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3) \geq {s_y}^2$$

$$\xrightarrow{\text{برای حالت سه بعدی}} (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \geq 2{s_y}^2$$

$$\xrightarrow{\text{برای حالت دو بعدی}} (\sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2 - \sigma_1\sigma_2) \geq {s_y}^2 \rightarrow \left(\frac{\sigma_1}{s_y}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{s_y}\right)^2 - \frac{\sigma_1\sigma_2}{{s_y}^2} = 1$$



برای استفاده از فرمول های فوق باید ابتدا σ_1 و σ_2 و σ_3 را با استفاده از روابط تبدیل تنش یا دایره ی مور به دست آوریم برای سهولت بیش تر از فرمول های زیر می توان استفاده کرد:

$$\sigma' = {}^{1}/_{\sqrt{2}}\left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}{}^2 + \tau_{yz}{}^2 + \tau_{zx}{}^2)\right]^{\frac{1}{2}}$$

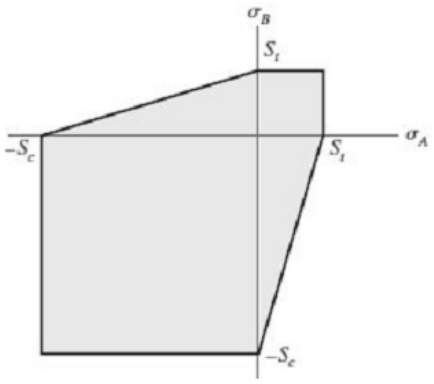
و برای تنش صفحه ای داریم:

$$\sigma' = (\sigma_x{}^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y{}^2 + 3\tau_{xy}{}^2)^{\frac{1}{2}}$$

- تئوری کولن- مور برای مواد شکل پذیر

استحکام همه ی مواد در حالت های کششی و فشاری یکسان نیست. برای مثال استحکام تسلیم آلیاژ های منیزیم در حالت فشاری 50% آن در حالت کششی است.

در مورد تنش صفحه ای، موقعی که دو تنش اصلی غیر صفر به صورت $\sigma_A \geq \sigma_B$ است، با وضیعتی مشابه سه حالت داده شده برای تئوری تنش برشی ماکزیمMSS روبه رو هستیم؛ این حالت ها عبارتند از:



حالت ۱: $\sigma_A \geq \sigma_B \geq 0$. برای این حالت $\sigma_1 = \sigma_A$ و $\sigma_3 = 0$ است:

$$\sigma_A \geq s_t$$

حالت ۲ $\sigma_A \geq 0 \geq \sigma_B$: . در این حالت $\sigma_1 = \sigma_A$ و $\sigma_3 = \sigma_B$ است:

$$\frac{\sigma_A}{s_t} - \frac{\sigma_B}{s_c} \geq 1$$

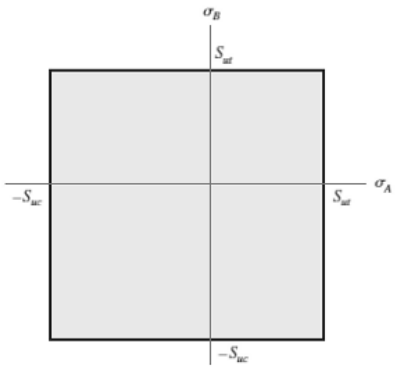
حالت ۳: $\sigma_A \geq \sigma_B \geq 0$. برای این حالت $\sigma_1 = 0$ و $\sigma_3 = \sigma_B$ است:

$$\sigma_B \geq -s_c$$

در شکل روبرو نمودار این حالت همراه با حالت های معمولا بلا استفاده متناظر با $\sigma_A \geq \sigma_B$ نشان داده شده است:

۵. معیار طراحی برای مواد ترد:

- ✓ در مواد ترد معیار σ_y نمی باشد بلکه σ_{uts} معیار می باشد.
- ✓ در مواد ترد عامل تغییر شکل تنش برشی نیست بلکه تنش های اصلی است. بنابراین فرضیه ی تنش قائم بیشینه MNS برای مواد ترد مناسب تر است، و به این صورت بیان می شود که اگر تنش عمودی ماکزیمم (σ_1) به تنش نهایی (σ_{uts}) برسد قطعه گسیخته می شود یا دچار شکست می شود.
- ✓ چون در مواد ترد استحکام کششی و فشاری برابر نیست و معمولا مواد ترد در مقابل فشار مقاوم تر اند نمودار معیار طراحی آن ها دیگر مربع نیست بلکه به صورت یک مستطیل است.



$$\sigma_{yt} \leq \sigma_{yc}$$

$$\sigma_{ut} \leq \sigma_{uc}$$

۶. معیار شکست برای مواد ترد:

معمولا مواد ترد دچار تغییر شکل نمی شوند و موقعی که تنش به تنش نهایی برسد سازه می شکند و مقدار تنش قائمی که موجب گسیختگی آن می شود برابر استحکام نهایی σ_{uts} است. (در آزمایش کشش ساده)

ولی موقعی که یک سازه تحت تنش صفحه ای قرار می گیرد از ملاک های زیر استفاده می کنیم:

۱. معیار تنش عمودی ماکزیمم: اگر تنش اصلی σ_1 به σ_u برسد سازه گسیخته می شود.

بنابراین تا زمانی که مقادیر مطلق هر دو تنش اصلی σ_A و σ_B کمتر از σ_u باشد. سازه به صورت سالم و قابل اطمینان کار می کند. در این معیار استحکام کششی و فشاری یکسان در نظر گرفته شده است ولی در عمل استحکام فشاری خیلی بیشتر از استحکام کششی (برای مواد ترد) می باشد. زیرا مواد دارای عیوب کریستالی مانند ترک ها و حفره های میکروسکوپی هستند و این عیوب مقاومت سازه را در مقابل کشش ضعیف می نمایند ولی در مقابل فشار اثری ندارد وبرای چنین قطعاتی بهتر است از معیار های مکانیک شکست استفاده شود.

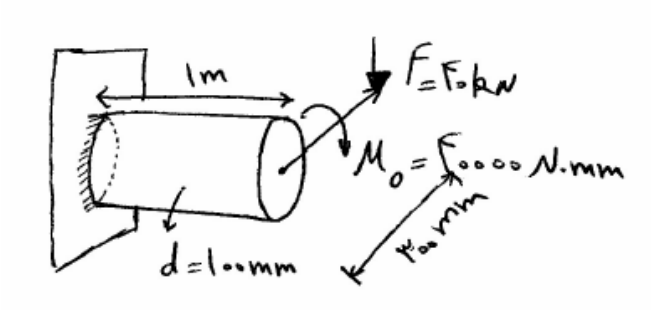
۲. تئوری کولن – مور برای مواد شکننده:

$$\sigma_A = \frac{S_{ut}}{n} \qquad \sigma_A \geq \sigma_B \geq 0$$

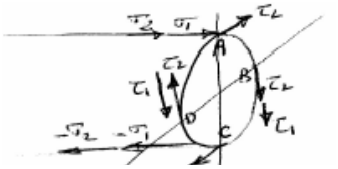
$$\frac{\sigma_A}{S_{ut}} - \frac{\sigma_B}{S_{uc}} = \frac{1}{n} \qquad \sigma_A \geq 0 \geq \sigma_B$$

$$\sigma_B = -\frac{S_{uc}}{n} \qquad 0 \geq \sigma_A \geq \sigma_B$$

مثال: آیا شفت زیر براساس انرژی واپیچشی دچار واماندگی استاتیکی می‌شود یا خیر؟ جنس از فولاد با $S_y = 300\,MPa$ است. تنش برشی مستقیم منظور شود.



حل : (اگر تنش برشی مستقیماً ذکر نشده بود، در نظر نمی‌گرفتیم) سطح بحرانی در محل تکیه گاه است. لذا نیروها روی سطح منتقل شود،



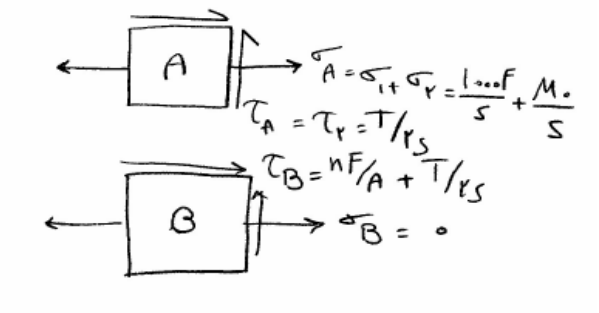
$$\tau_1 = \frac{nF}{A} = \frac{4}{3}\,\frac{F}{\pi\frac{d^2}{4}} = \text{عدد}$$

$$\tau_2 = \frac{Tr}{j} = \frac{T}{2S} \Rightarrow \tau_2 = \text{عدد}$$

$$\sigma_1 = \frac{M_x}{S} = \frac{1000F}{S} = \text{عدد} \quad , \quad \sigma_2 = \frac{M_0}{S} = \text{عدد}$$

بین A و C هر دو یکسان است چون جسم نرم است. لذا فرض می‌کنیم A بحرانی است. بین Dو B , نقطه‌ی B بحرانی است.

در نتیجه: یا A بحرانی است یا B.



$$\sigma_A = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{1000F}{S} + \frac{M_0}{S}$$

$$T_A = \tau_2 = \frac{T}{2S}$$

$$\tau_B = \frac{nF}{A} + \frac{T}{2S}$$

$$\sigma_B = 0$$

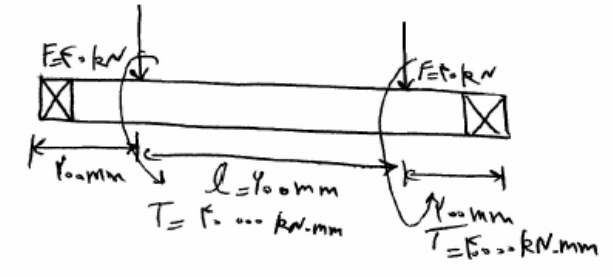
$\sigma_{eA} = \sqrt{\sigma_A^2 + 3\tau_A^2}$ =محاسبه شود

$\sigma_{eB} = \sqrt{\sigma_B^2 + 3\tau_B^2}$ =محاسبه شود

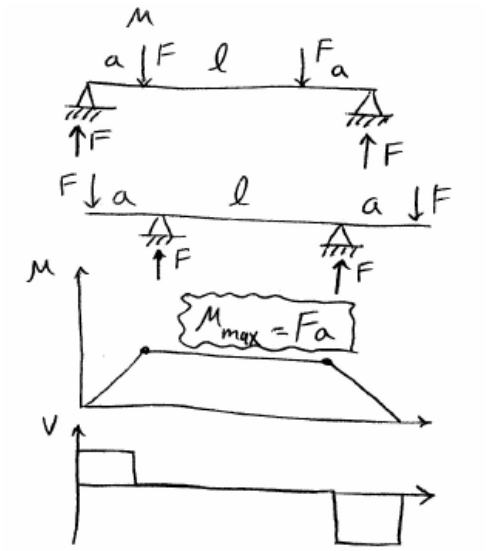
فرض: $\sigma_{eA} > \sigma_{eB}$ است. پس A بحرانی است.

$n_s = \frac{S_y}{\sigma_{eA}} =$ محاسبه شود=

مثال: قطر شفت غیرچرخان براساس ضریب اطمینان 2 کدام است؟ جنس از فولاد با مقاومت تسلیم $S_y = 400MPa$ است.
براساس انرژی واپیچشی مسئله حل شود.



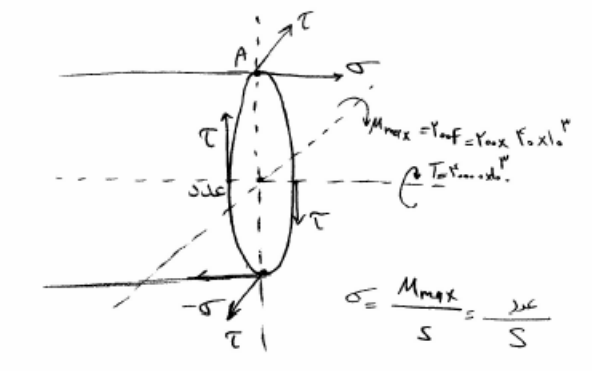
تذکر: در مقاومت مصالح خمش خالص (مقدار ممان ثابت است زیرا $\rho=\frac{EI}{M}=const$) به یکی از دو حالت زیر است:



حل مثال: چون ممان خالص است، پس سطح بحرانی بین دو نیروی F است. حال سطح بحرانی و نیروها بر روی آن رسم شود. چون در صورت مسئله ذکر نشده از تنش برشی مستقیم صرف نظر می‌شود.
×همهٔ نیروها بر حسب نیوتن N و همهٔ طول‌ها بر حسب mm است.

$$M_{max} = 200F = 200 \times 40 \times 10^3$$

با توجه به شکل مقابل نقطه A بحرانی است.



$$\sigma = \frac{M_{max}}{S} = \frac{\text{عدد}}{S}$$

$$\tau = \frac{T}{2S} = \frac{\text{عدد}}{S}$$

$$\sigma_{eA} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \frac{\text{عدد}}{S}$$

$$n_s = \frac{S_y}{\sigma_{eA}} \Rightarrow 2 = \frac{400}{\frac{\text{عدد}}{S}} \Rightarrow S = \text{محاسبه می‌شود}$$

$$S = \frac{I}{C} = \frac{\frac{\pi d^4}{64}}{\frac{d}{2}} \Rightarrow d = \text{محاسبه می‌شود}$$

پایان جلسه دوم