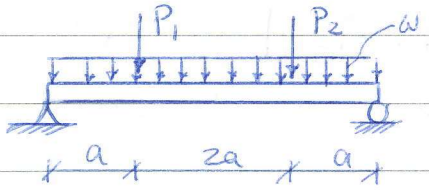
تغییر شکل تیر با استفاده از اصل سوپرپوزیسیون

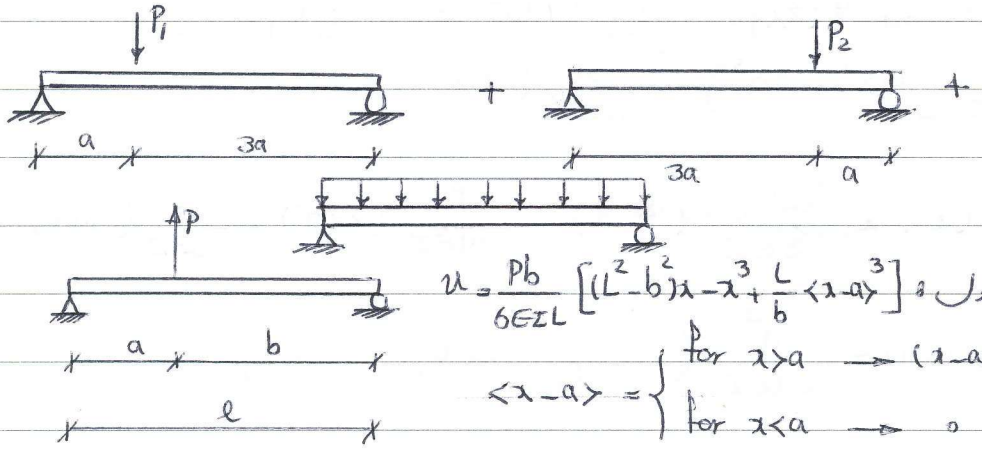
شرایط استفاده از اصل سوپرپوزیسیون:

۱) تغییر شکل حاصل از هر کدام از بارها به اندازه‌ای نباشد که بر بارهای دیگر تأثیر بگذارد.

۲) حالت بررسی حالت الاستیک خطی باشد.

مثال: مطلوب است تغییر شکل تیر با استفاده از تغییر شکل‌های وسط آن را به دست آورید.





در جدول:

$$v = \frac{Pb}{6EIL}\left[(L^2-b^2)x - x^3 + \frac{L}{b}\langle x-a\rangle^3\right]$$

$$\langle x-a\rangle = \begin{cases} (x-a) & \text{for } x>a \\ 0 & \text{for } x<a \end{cases}$$

$$v_1(x) = \frac{-P_1(3a)}{6EI(4a)}\left[((4a)^2-(3a)^2)x - x^3 + \frac{4a}{3a}\langle x-a\rangle^3\right]$$

$$\rightarrow v_1(x) = \frac{-P_1}{8EI}\left[7a^2x - x^3 + 4/3\langle x-a\rangle^3\right]$$

$$v_2(x) = \frac{-P_2(a)}{6EI(4a)}\left[((4a)^2-a^2)x - x^3 + \frac{4a}{a}\langle x-3a\rangle^3\right]$$

$$\rightarrow v_2(x) = \frac{-P_2}{24EI}\left[15a^2x - x^3 + 4\langle x-3a\rangle^3\right]$$

$$v_3(x) = \frac{-\omega x}{24EI}\left(x^3 - 8ax^2 + 64a^3\right)$$

$$\rightarrow v(x) = v_1(x) + v_2(x) + v_3(x)$$

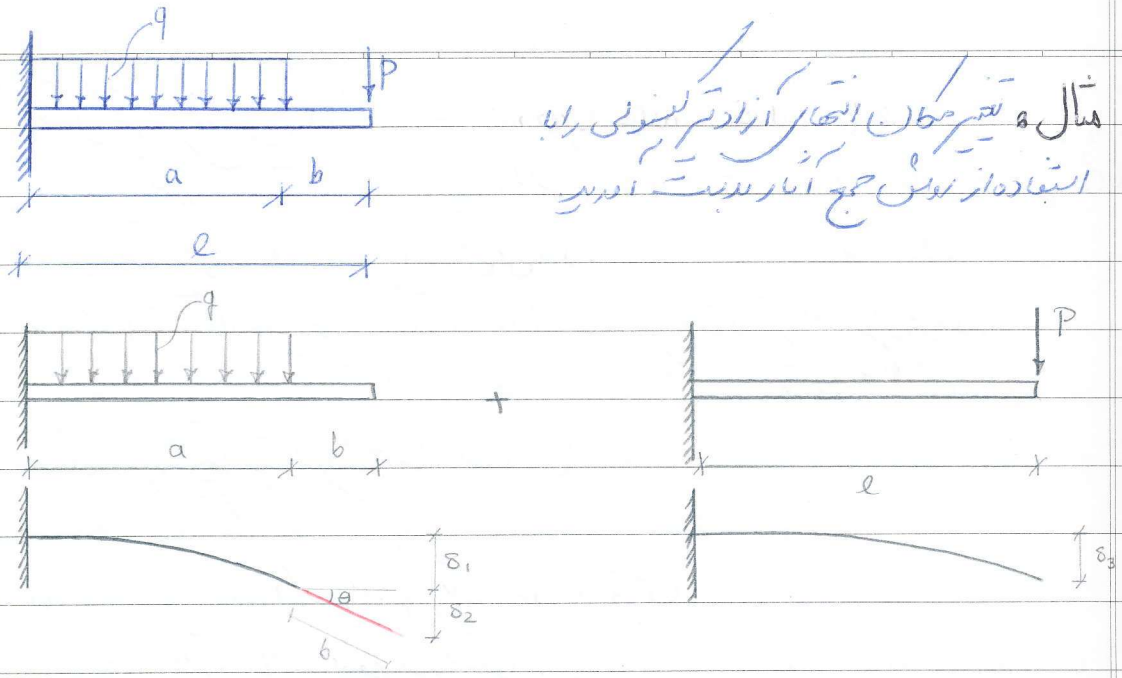
$$\rightarrow v(x) = \frac{-P_1}{8EI}\left[7a^2x - x^3 + \tfrac{4}{3}\langle x-a\rangle^3\right] + \frac{-P_2}{24EI}\left[15a^2x - x^3 + 4\langle x-3a\rangle^3\right] - \frac{\omega x}{24EI}\left(x^3 - 8ax^2 + 64a^3\right)$$

$$x = 2a \rightarrow v(2a) = \frac{-P_1}{8EI}\left[14a^3 - 8a^3 + \tfrac{4}{3}a^3\right] - \frac{P_2}{24EI}\left[30a^3 - 8a^3\right] - \frac{\omega a}{12EI}\left(8a^3 - 32a^3 + 64a^3\right)$$

$$\rightarrow v(2a) = \frac{-P_1}{8EI}\left(\frac{22}{3}a^3\right) - \frac{P_2}{24EI}\left(22a^3\right) - \frac{\omega a}{12EI}\left(40a^3\right)$$

$$\rightarrow v(2a) = \frac{a^3}{24EI}\left(-22P_1 - 22P_2 - 80\omega a\right)$$

مثال: تغییر مکان انتهای آزاد تیر کنسولی را با استفاده از روش جمع آثار بدست آورید.



$$\delta_1 = \frac{qa^4}{8EI}$$

$$\theta = \frac{qa^3}{6EI} \quad \rightarrow \quad \sin\theta = \frac{\delta_2}{b} \quad \rightarrow \quad \delta_2 = b\theta = \frac{qa^3 b}{6EI}$$

$$\delta_3 = \frac{Pl^3}{3EI}$$

$$\rightarrow \quad v = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = \frac{qa^3}{2EI}\left(\frac{b}{3} + \frac{a}{4}\right) + \frac{Pl^3}{3EI}$$

تحلیل تیرهای نامعین (Indeterminate Beam Analysis) 8

تیر نامعین تیری است که تعداد تکیه‌گاه‌هایش بیشتر از تعداد معادلات مستقل تعادل است.
تعادل برای یافتن واکنش‌های تکیه‌گاهی بس نیست.
اگر تیر دارای تکیه‌گاه‌های بیش از تعداد معادلات مستقل باشد تیر نامعین می‌گردد.

دو روش برای تحلیل تیرهای نامعین استفاده می‌کنیم:

۱) روش حل معادله دیفرانسیل تغییر شکل ارتجاعی
۲) روش مبتنی بر اصل سوپرپوزیشن

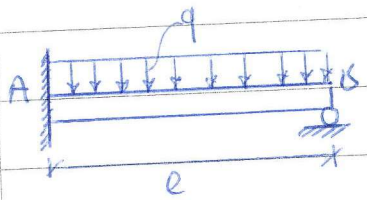
در هر دو روش مطلب مشترک است و باید درجه نامعینی را تشخیص و معادلات را بدست آوریم.

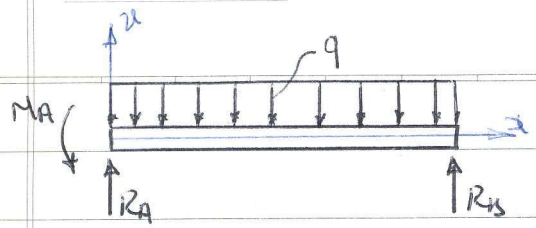
۱) روش حل معادله دیفرانسیل تغییر شکل ارتجاعی:

۱) انتخاب واکنش اضافی
۲) تشکیل معادله دیفرانسیل تغییر شکل ارتجاعی بر حسب واکنش اضافی
۳) حل معادله دیفرانسیل تغییر شکل
۴) اعمال شرایط مرزی و سازگاری جابجایی‌ها برای بدست آوردن واکنش اضافی

در تشکیل معادلات مختار هستیم از معادله درجه دوم، سوم یا چهارم استفاده نماییم.

مثال: مطلوبست رسم دیاگرام عکس‌العمل‌های تیر نشان داده شده.





تیر کنسول و تیر ساده و واکنش اضافی R_B

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_A = q.l - R_B \qquad \Sigma M = 0 \Rightarrow M_A = \frac{ql^2}{2} - R_B.l$$

$$M(x) = R_A.x - \frac{qx^2}{2} - M_A \Rightarrow EI\frac{d^2v}{dx^2} = R_A.x - \frac{qx^2}{2} - M_A$$

$$\Rightarrow EI\frac{dv}{dx} = \frac{R_A}{2}x^2 - \frac{qx^3}{6} - M_A.x + C_1$$

$$\Rightarrow EIv = \frac{R_A}{6}x^3 - \frac{q}{24}x^4 - \frac{M_A}{2}x^2 + C_1x + C_2$$

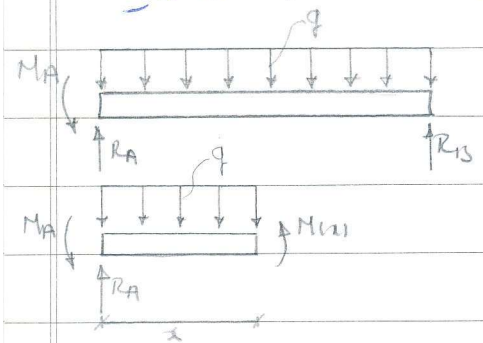
$$\Rightarrow EIv = \frac{ql}{6}x^3 - \frac{R_B}{6}x^3 - \frac{qx^4}{24} - \frac{ql^2}{4}x^2 + \frac{R_B l}{2}x^2 + C_1x + C_2$$

شرایط مرزی و شرط مرزی برای تیر اصلی است نه تیر ساده

$$\begin{cases} v(0) = 0 \\ v'(0) = 0 \\ v(l) = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 0 \;,\; C_2 = 0 \;,\; R_B = \frac{3ql}{8}$$

$$\Rightarrow R_A = \frac{5ql}{8} \qquad M_A = \frac{ql^2}{8}$$

تمرین: M_A را در مثال فوق واکنش اضافی در نظر گرفته و مسئله را مجدداً حل نمایید.



تیر ساده و تیر ساده M_A و واکنش اضافی

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow M_A - \frac{q}{2}l^2 + R_B l = 0$$

$$\Rightarrow R_B = \frac{q}{2}l - \frac{M_A}{l}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_A + R_B = ql$$

$$\Rightarrow R_A = ql - \frac{q}{2}l + \frac{M_A}{l} = \frac{q}{2}l + \frac{M_A}{l}$$

$$M(x) + \frac{qx^2}{2} - R_A x + M_A = 0 \Rightarrow M(x) = -\frac{q}{2}x^2 + R_A x - M_A$$

$$\Rightarrow M(x) = -\frac{q}{2}x^2 + \frac{q}{2}lx + \frac{M_A}{l}x - M_A$$

$$\Rightarrow EI\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{-q}{2}x^2 + \frac{q}{2}lx + \frac{M_A}{l}x - M_A$$

$$\Rightarrow EI\frac{dv}{dx} = \frac{-q}{6}x^3 + \frac{q}{4}lx^2 + \frac{M_A}{2l}x^2 - M_Ax + C_1$$

$$\Rightarrow EIv(x) = \frac{-q}{24}x^4 + \frac{q}{12}lx^3 + \frac{M_A}{6l}x^3 - \frac{M_A}{2}x^2 + C_1x + C_2$$

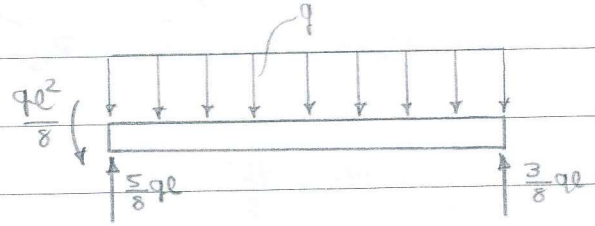
1) $v(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

2) $\dot{v}(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

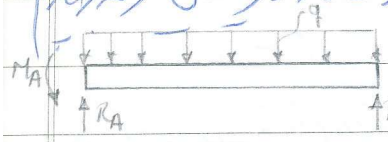
3) $v(l) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{-q}{24}l^4 + \frac{q}{12}l^4 + \frac{M_Al^2}{6} - \frac{M_Al^2}{2}$

$$\Rightarrow 0 = \frac{q}{24}l^4 - \frac{2M_A}{6}l^2 \Rightarrow \frac{1}{3}M_Al^2 = \frac{q}{24}l^4 \Rightarrow M_A = \frac{ql^2}{8}$$

$$\Rightarrow R_B = \frac{q}{2}l - \frac{M_A}{l} = \frac{q}{2}l - \frac{q}{8}l \Rightarrow \begin{cases} R_B = \frac{3}{8}ql \\ R_A = \frac{5}{8}ql \end{cases}$$



تمرین: هر کدام از روابط دارید و الش اضافی در نظر بگیرید و از طی دو روش انتگرال سه تا حل مسئله را حل کنید. R_A و الش اضافی



$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow \frac{q}{2}l^2 - R_A l + M_A = 0$

$\rightarrow M_A = R_A l - \frac{q}{2}l^2 \qquad \Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_A + R_B = ql \rightarrow R_B = ql - R_A$

$EI\frac{d^4v}{dx^4} = -q \Rightarrow EI\frac{d^3v}{dx^3} = -qx + C_1 \rightarrow EI\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{-q}{2}x^2 + C_1 x + C_2$

$\rightarrow EI\frac{dv}{dx} = \frac{-q}{6}x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3 \Rightarrow EIv = \frac{-q}{24}x^4 + \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3 x + C_4$

1) $v(0) = 0 \rightarrow C_4 = 0 \qquad$ 2) $v'(0) = 0 \rightarrow C_3 = 0$

3) $V(0) = R_A \rightarrow C_1 = R_A$

4) $M(l) = 0 \rightarrow 0 = \frac{-q}{2}l^2 + C_1 l + C_2 \Rightarrow 0 = \frac{-q}{2}l^2 + R_A l + C_2$

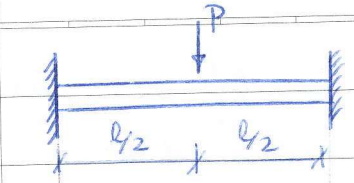
$\rightarrow C_2 = \frac{q}{2}l^2 - R_A l$

5) $v(l) = 0 \rightarrow 0 = \frac{-q}{24}l^4 + \frac{R_A}{6}l^3 + \frac{l^2}{2}\left(\frac{q}{2}l^2 - R_A l\right)$

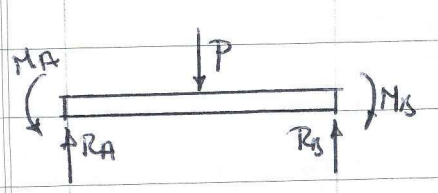
$0 = \frac{-q}{24}l^4 + \frac{R_A}{6}l^3 + \frac{q}{4}l^4 - \frac{R_A}{2}l^3 \rightarrow 0 = \frac{5q}{24}l^4 - \frac{1}{3}R_A l^3$

$\rightarrow R_A = \frac{5}{8}ql \quad , \quad R_B = \frac{3}{8}ql \quad , \quad M_A = \frac{ql^2}{8}$

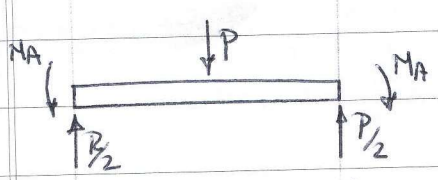
مثال: تعادل المثل لی یک تیر دوسر گیردار شکل را بدست آورید.



* اگر بارهای بروی تیر قائم باشند درصدد B_x و A_x می‌توانیم بنویسیم که $A_x = B_x$. وچون تأثیرشان در تغییر شکل تحمل تیر تشابه تأثیرات در نظر می‌گیریم.



* در این مسئله مخصوص به دلیل تقارن $R_A = R_B = P/2$ ، $M_A = M_B$ باشد. پس کمیت مجهول داریم.



M_A را مجهول اضافی می‌گیریم و از معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم استفاده می‌کنیم.

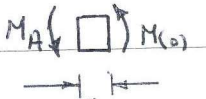
$$0 \le x \le l/2 \quad ; \quad EI\frac{d^4v}{dx^4} = 0 \rightarrow EI\frac{d^3v}{dx^3} = C_1 \rightarrow EI\frac{d^2v}{dx^2} = C_1x + C_2$$

$$EI\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3 \rightarrow EIv = \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3x + C_4$$

ترتیب استفاده

شرایط مرزی:

$$\begin{cases} v(0) = 0 & (5) \\ v'(0) = 0 & (3) \\ v'(l/2) = 0 & (4) \\ M(0) = -M_A & (2) \\ V(0) = P/2 & (1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = P/2 \\ C_2 = -M_A \\ C_3 = 0 \\ M_A = Pl/8 \\ C_4 = 0 \end{cases}$$



$$v(x) = \frac{P}{12EI}x^3 - \frac{Pl}{16EI}x^2 \qquad 0 \le x \le l/2 \qquad M_A = \frac{Pl}{8}$$

مجهول تقارن داریم برای معادله تغییر شکل ناحیه دوم می‌توانیم برحسب $x - l$ قرار دهد.

۲) روش ماتریسی بر اصل سوپرپوزیسیون :

۱) تعیین واکنش های اضافی (واکنش اضافی)

۲) حذف واکنش های اضافی از تیر و تشکیل تیر پایه

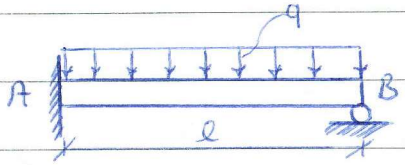
۳) محاسبه تغییر شکل یا شیب های نظیر محل واکنش های اضافی در تیر پایه در اثر بارگذاری واقعی تیر.

۴) محاسبه تغییر شکل یا شیب های نظیر محل واکنش های اضافی در تیر پایه ناشی از اعمال فقط واکنش های اضافی (بعنوان بارهای خارجی) روی تیر پایه.

۵) تشکیل معادلات سازگاری تغییر شکل برای اساس اصل سوپرپوزیسیون (یعنی این واقعیت که تغییر شکل یا شیب های نهایی ناشی از تأثیر همزمان بارگذاری خارجی واقعی و واکنش های اضافی برابر با هیچ تغییر شکل یا شیب های هندسی شده است)

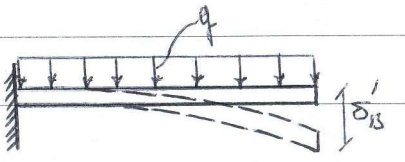
۶) یافتن واکنش های اضافی از حل معادلات سازگاری و تعیین واکنش های از تعادل

مثال : مطلوبست محاسبه عکس العمل های تکیه گاهی داده شده.



۱) واکنش R_B را بعنوان واکنش اضافی انتخاب می کنیم.

در مرحله ۲ تیر پایه تحت بارگذاری خارجی واقعی روی تیر قرار می گیرد.



در مرحله ۳ تیر پایه تحت واکنش اضافی بعنوان بار خارجی قرار می گیرد.

در مرحله تشکیل واکنش اضافی معادله سازگاری را می نویسیم همچون از کجا باید خبر داریم.

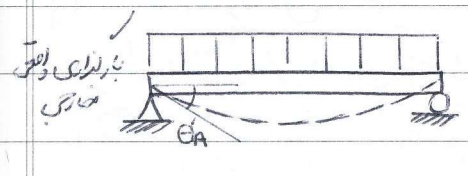
معادله سازگاری تغییر شکل

$$\delta_{1B} = \delta'_{1B} + \delta''_{1B} = 0$$

$$\text{جدول}\begin{cases}\delta'_{15}=-\dfrac{ql^4}{8EI}\\ \delta''_{15}=\dfrac{R_5 l^3}{3EI}\end{cases}\quad,\quad \delta'_{15}+\delta''_{15}=0 \Rightarrow R_5=\frac{3ql}{8}$$

$$\Rightarrow R_A=\frac{5ql}{8} \qquad M_A=\frac{ql^2}{8}$$

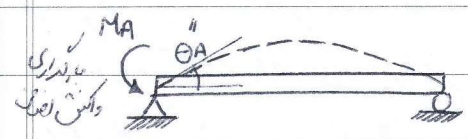
۲) واکنش M_A را واکنش اضافی فرض می‌کنیم



تیر ساده

معادله سازگاری

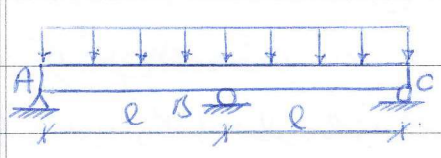
$$\theta_A=\theta'_A+\theta''_A=0$$



$$\text{جدول}\begin{cases}\theta'_A=-\dfrac{ql^3}{24EI}\\ \theta''_A=\dfrac{M_A.l}{3EI}\end{cases}$$

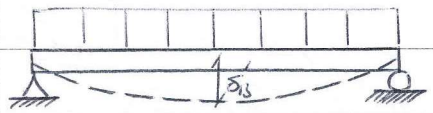
$$\Rightarrow \theta'_A=-\theta'_A \Rightarrow M_A=\frac{ql^2}{8}$$

مثال: عکس العمل‌های تیر زیر داده شده را بدست آورید.

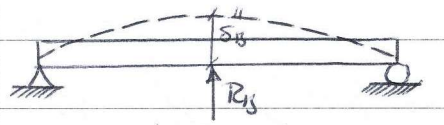


B واکنش اضافی

می‌توانیم C را واکنش اضافی بگیریم اما در جدول نداریم.



محل واکنش اضافی برای معادله سازگاری انتخاب می‌کردد.



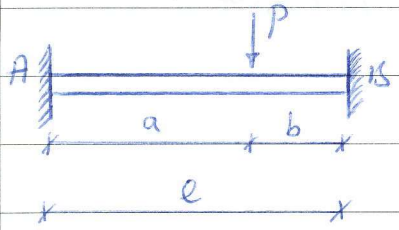
سازگاری: $\delta'_{15}+\delta''_{15}=0$

$$\delta'_{15}=-\frac{5q(2\ell)^4}{384EI}=-\frac{5q\ell^4}{24EI}$$

$$\delta''_{15}=\frac{R_5(2\ell)^3}{48EI}=\frac{R_5.\ell^3}{6EI}$$

سازه‌ی نامعین $\rightarrow R_B = \frac{5ql}{4}$ $\quad R_A = R_C = \frac{3ql}{8}$

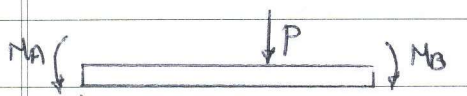
مثال: عکس العمل یکی تکیه‌گاه‌های زیر را بدست آورید.



برای حل عکس العمل یکی از تکیه‌گاه‌ها نیز باید آن را حذف کنیم و به جای آن یک نیروی مجهول قرار دهیم.
(تا زمانی که سازه نامعین باشد نمی‌توانیم حذف کنیم)

M_A و M_B ← والنش اضافی

تیر ساده ← تیر ساده



معادلات سازگاری

$$\begin{cases} \theta_A = \theta'_A + \theta''_A + \theta'''_A = 0 \\ \theta_B = \theta'_B + \theta''_B + \theta'''_B = 0 \end{cases}$$

$$\theta'_A = -\frac{Pab(l+b)}{6EIl} \qquad \theta'_B = \frac{Pab(l+a)}{6EIl}$$

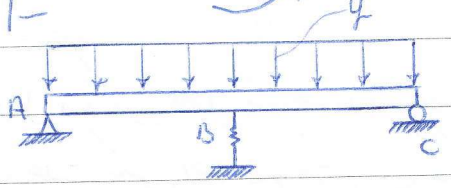
$$\theta''_A = \frac{M_A \cdot l}{3EI} \qquad \theta''_B = -\frac{M_A \cdot l}{6EI}$$

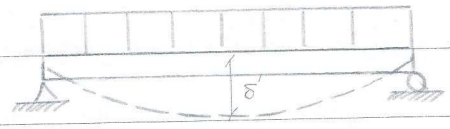
$$\theta'''_A = \frac{M_B l}{6EI} \qquad \theta'''_B = -\frac{M_B \cdot l}{3EI}$$

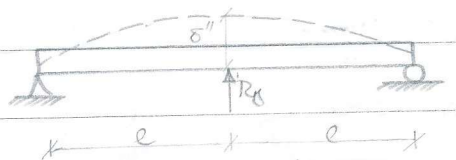
$$\rightarrow M_A = \frac{Pab^2}{l^2} \qquad M_B = \frac{Pa^2b}{l^2}$$

۲۵ $R_A = \frac{Pb^2}{l^3}(l+2a)$ $\qquad R_B = \frac{Pa^2}{l^3}(l+2b)$

تمرین: با فرض اینکه در محل تکیه‌گاه غلتکی B تکیه‌گاه فنری با ثابت k داشته باشیم مثال قبل را مجدداً حل کنید.







$$\delta = \delta' + \delta'' = -\frac{R_B}{k} \quad \begin{cases} \delta' = -\dfrac{5q\ell^4}{24EI} \\ \delta'' = \dfrac{R_B\ell^3}{6EI} \end{cases}$$

$$\rightarrow -\frac{5q\ell^4}{24EI} + \frac{R_B\ell^3}{6EI} = -\frac{R_B}{k} \rightarrow R_B\left(\frac{\ell^3}{6EI} + \frac{1}{k}\right) = \frac{5q\ell^4}{24EI}$$

$$\rightarrow R_B\left(\frac{k\ell^3 + 6EI}{6kEI}\right) = \frac{5q\ell^4}{24EI} \rightarrow R_B = \frac{5qk\ell^4}{24(k\ell^3 + 6EI)}$$

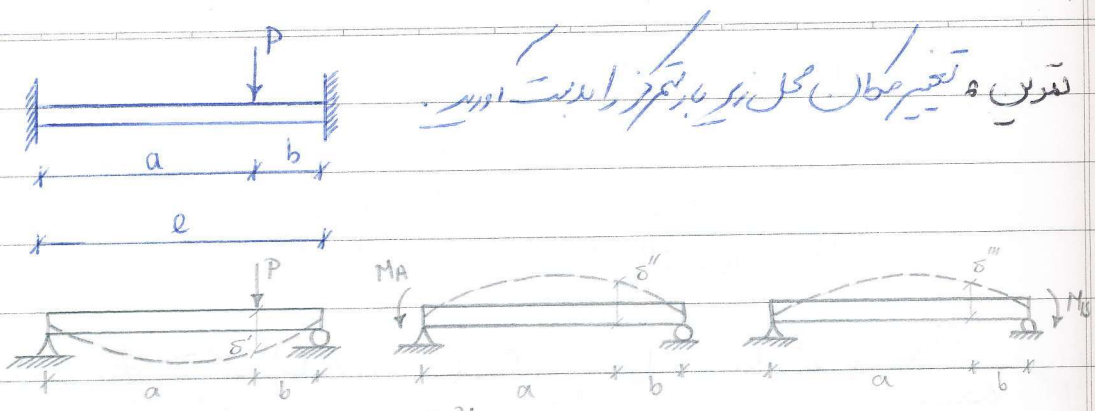
$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow R_B\ell + 2R_C\ell - 2q\ell^2 = 0 \rightarrow R_C = -\frac{R_B}{2} + q\ell$$

$$\rightarrow R_C = \frac{-5}{48}\left(\frac{qk\ell^4}{k\ell^3 + 6EI}\right) + q\ell$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow R_A + R_B + R_C = 2q\ell \rightarrow R_A = 2q\ell - R_B - R_C$$

$$\rightarrow R_A = q\ell - \frac{5}{48}\left(\frac{qk\ell^4}{k\ell^3 + 6EI}\right)$$

تمرین ۵: تغییر مکان محل بار تمرکز را بدست آورید.



$$M_A = \frac{Pab^2}{l^2} \qquad M_B = \frac{Pa^2b}{l^2}$$

$$\delta = \delta' + \delta'' + \delta'''$$

$$v_1 = \frac{-Pb}{6EIL}\left[(l^2-b^2)x - x^3 + (l/b)\langle x-a\rangle^3\right]$$

$$\rightarrow \delta' = v_1(a) = \frac{-Pb}{6EIl}\left[(l+b)a^2 - a^3\right] = \frac{-Pb^2a^2}{6EIl}$$

$$v_3 = \frac{M_B x}{6EIl}(l^2-x^2) \rightarrow \delta''' = v_3(a) = \frac{M_B a}{6EIl}(b(l+a))$$

$$\rightarrow \delta''' = \frac{Pa^2b^2}{6EIl^3}(l+a)$$

برای یافتن v را به صورت زیر می‌یابیم.

$$\sum M_A = 0 \rightarrow M_A = R_B l \qquad \sum F_y = 0 \rightarrow R_A = R_B$$

$$\rightarrow R_A = R_B = \frac{M_A}{l}$$

$$\sum M = 0 \rightarrow M(x) + M_A - R_A x = 0$$

$$\rightarrow M(x) = M_A(x/l - 1) = \frac{M_A}{l}(x-l)$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M_A}{l}(x-l) \rightarrow EI\frac{dv}{dx} = \frac{M_A}{2l}(x-l)^2 + C_1$$

$$\rightarrow EIv = +\frac{M_A}{6l}(x-l)^3 + C_1x + C_2$$

$$v(0) = 0 \rightarrow 0 = \frac{-M_A}{6l}(l)^3 + C_2 \rightarrow C_2 = +\frac{M_A l^2}{6}$$

$$v(l) = 0 \rightarrow 0 = 0 + C_1 l + \frac{M_A l^2}{6} \rightarrow C_1 = -\frac{M_A l}{6}$$

$$v = \frac{1}{EI}\left(\frac{M_A}{6l}(x-l)^3 - \frac{M_A}{6}lx + \frac{M_A}{6}l^2\right) = \frac{M_A}{6EI}\left(\frac{(x-l)^3}{l} - lx + l^2\right)$$

$$\rightarrow v_3 = \frac{M_A}{6EIl}\left((x-l)^3 - l^2x + l^3\right)$$

$$\rightarrow \delta'' = v_3(a) = \frac{M_A}{6EIl}\left((a-l)^3 - l^2a + l^3\right) = \frac{M_A}{6EIl}\left(-b^3 - l^2a + l^3\right)$$

$$= \frac{M_A}{6EIl}\left(l^2(b) - b^3\right) = \frac{M_A}{6EIl}\left(b(a)(l+b)\right) = \frac{M_A ab}{6EIl}(l+b)$$

$$\rightarrow \delta'' = \frac{Pa^2b^3}{6EIl^3}(l+b)$$

$$\delta = \frac{-Pb^2a^2}{6EIl} + \frac{Pa^2b^3}{6EIl^3}(l+b) + \frac{Pa^3b^2}{6EIl^3}(l+a)$$

$$= \frac{Pa^2b^2}{6EIl}\left(-1 + \frac{b}{l^2}(l+b) + \frac{a}{l^2}(l+a)\right) = \frac{Pa^2b^2}{6EIl}\left(-1+1+\frac{b^2+a^2}{l^2}\right)$$

$$\rightarrow \delta = \frac{Pa^2b^2(a^2+b^2)}{6EIl^3}$$

لحضی مواقع دیگر احتیاج به محل مجدد تغییر شکل نیز داریم. در این مواقع از قضیه ی
زیر استفاده می کنیم.