

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه فنی و حرفه‌ای

معادلات دیفرانسیل

دکتر داود اسداللهی



فصل اول: تعاریف و مقدمات

دانشگاه فنی و حرفه‌ای

هر رابطه‌ای بین تابع و متغیر مستقل آن و مشتقات تابع را یک معادله دیفرانسیل می‌نامیم. مانند

$$y' + y - x = 0$$

$$\sin y - e^{y'} = x$$

$$y'' - 2\ln y = \tan x$$



مرتبه یک معادله

دانشگاه فنی و حرفه‌ای

بالاترین مرتبه مشتق گرفته شده از تابع در یک معادله دیفرانسیل را مرتبه آن معادله می‌نامیم. بعنوان مثال

$$y - x = 0 \Rightarrow \text{مرتبه} = 0$$

$$\sin y - e^{y'} = x \Rightarrow \text{مرتبه} = 1$$

$$y'' - 2 \ln y = \tan x \Rightarrow \text{مرتبه} = 2$$



درجه یک معادله

دانشگاه فنی و حرفه‌ای

اگر یک معادله به صورت خطی نوشته شده باشد، توان بالاترین مرتبه مشتق موجود را درجه آن معادله می‌نامیم. بعنوان مثال

$$3y'^2 + 4xy = 0 \Rightarrow \text{درجه} = 2 \quad \text{مرتبه} = 1$$

$$y^{(5)2} - y^{6(4)} = y'' \Rightarrow \text{درجه} = 2 \quad \text{مرتبه} = 5$$

$$y'' - 2\ln y = \tan x \Rightarrow \text{درجه} = 1 \quad \text{مرتبه} = 2$$



دسته منحنی

دانشگاه فنی و حرفه‌ای

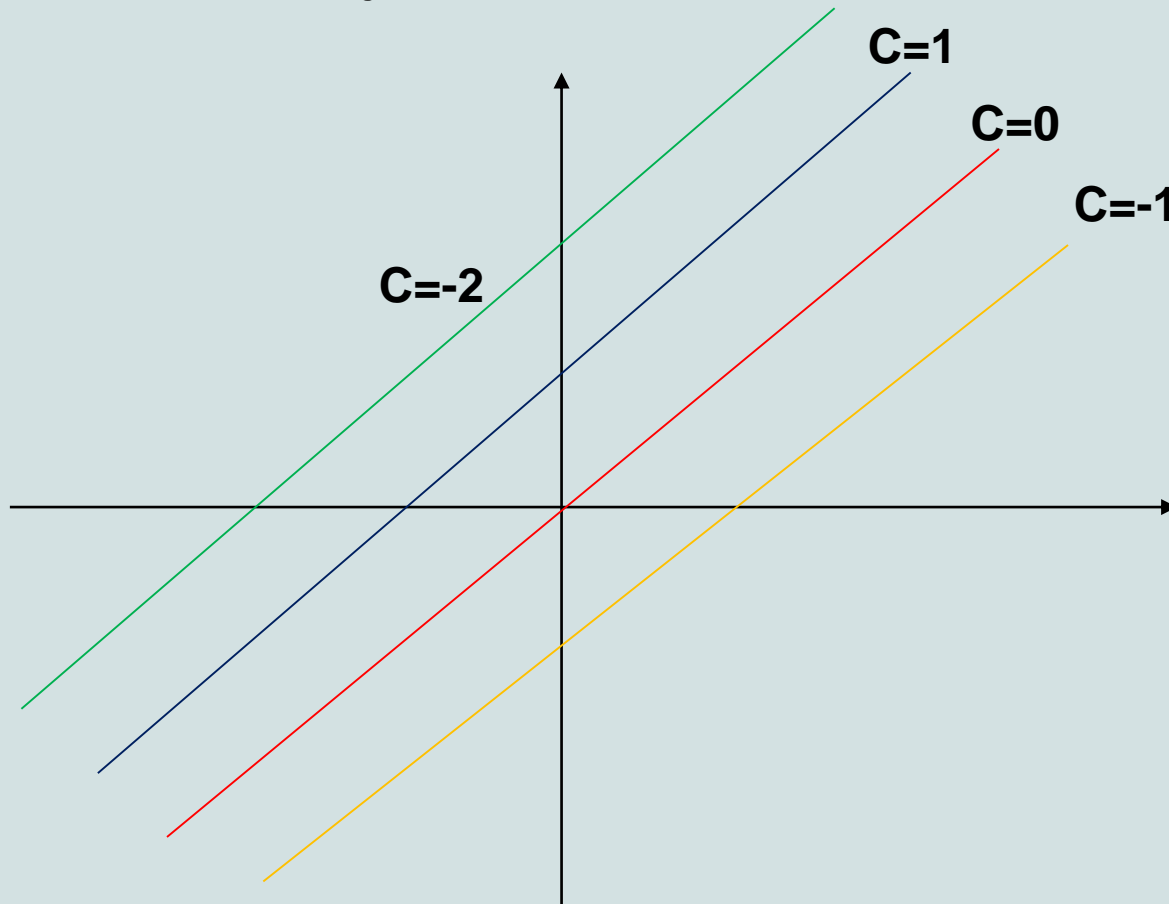
هر تابع به صورت $y = f(x, c)$ را که در آن c پارامتر ثابت است،
یک دسته منحنی می‌نامیم. مثل $y = x^2 + c$ و $y = cx$
به ازای مقادیر مختلف c نمودار دسته منحنی کشیده می‌شود.



دانشگاه فنی و حرفه‌ای

دسته منحنی

$$y = x + c$$

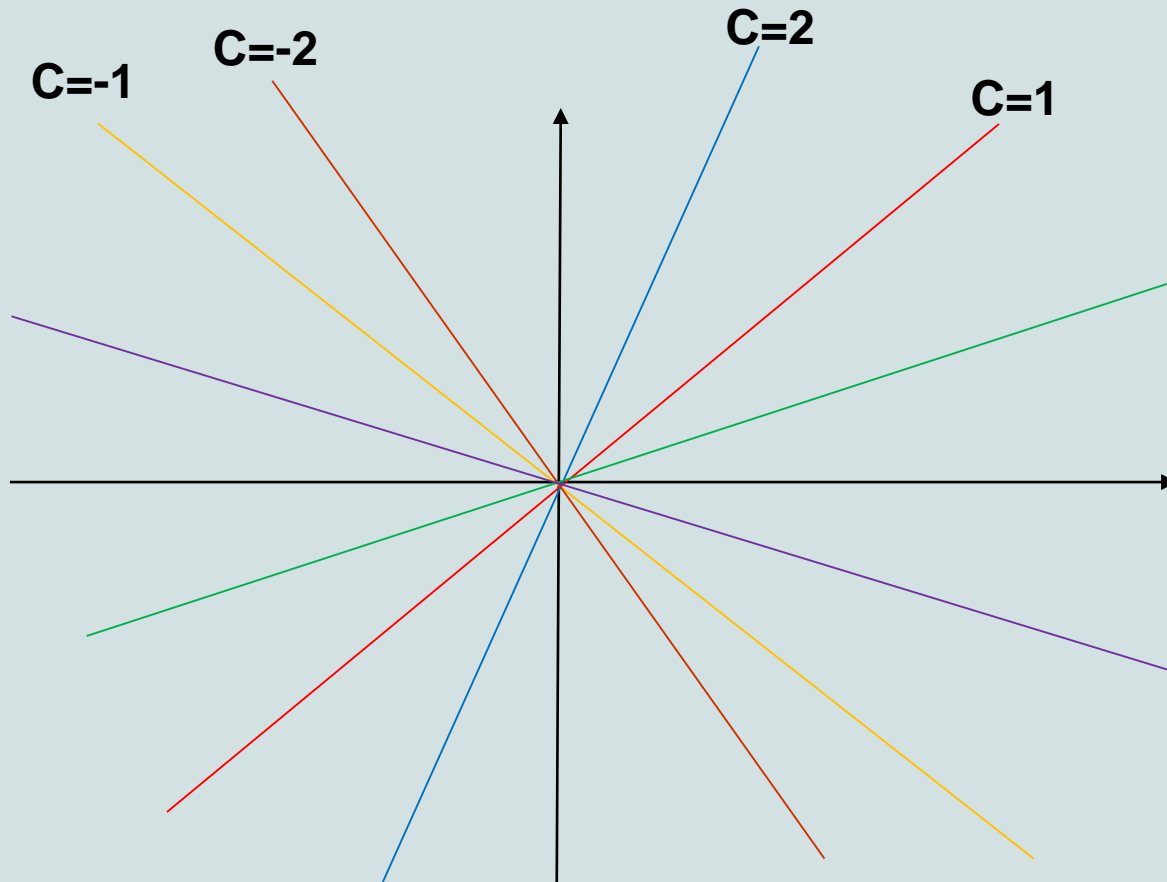




دسته منحنی

دانشگاه فنی و حرفه‌ای

$$y = cx$$





معادله دیفرانسیل دسته منحنی

دانشگاه فنی و حرفه‌ای

برای بدست آوردن معادله دیفرانسیل یک دسته منحنی کافی است در دستگاه معادلات زیر مقدار پارامتر c را حذف کرد.

$$\begin{cases} y = f(x, c) \\ y' = f'(x, c) \end{cases}$$



مثال ۱

دانشگاه فنی و حرفه‌ای

معادله دیفرانسیل دسته منحنی $y = cx$ را بدست آورید.

$$\begin{cases} y = cx \\ y' = c \end{cases} \Rightarrow y' = \frac{y}{x}$$



مثال ۲

دانشگاه فنی و حرفه‌ای

معادله دیفرانسیل دسته منحنی $y = x^2 + cx$ را بدست آورید.

$$\begin{cases} y = x^2 + cx \\ y' = 2x + c \Rightarrow c = y' - 2x \end{cases} \Rightarrow y = x^2 + (y' - 2x)x$$



مثال ۳

دانشگاه فنی و حرفه‌ای

معادله دیفرانسیل دسته منحنی $y = cx^2$ را بدست آورید.

$$\begin{cases} y = cx^2 \\ y' = 2cx \Rightarrow c = \frac{y'}{2x} \end{cases} \Rightarrow y = \left(\frac{y'}{2x} \right) x^2 = \frac{y'x}{2}$$



جواب یک معادله دیفرانسیل

دانشگاه فنی و حرفه‌ای

هر تابعی که در یک معادله دیفرانسیل صدق کند، را یک جواب معادله می‌نامیم. بعنوان مثال $y = x^2$ یک جواب معادله $y' - 2x = 0$ می‌باشد. همچنین برای هر c تابع $y = x^2 + c$ نیز جواب معادله فوق است.



جواب یک معادله دیفرانسیل

دانشگاه فنی و حرفه‌ای

اگر همه جوابهای یک معادله را با پارامتر بیان کنیم، این جواب را **جواب عمومی** معادله می‌نامیم.

اگر جواب عمومی را تحت شرایط اولیه و خاص قرار داده و مقدار پارامتر آن را مشخص کنیم، جواب بدست آمده یک **جواب خصوصی** خواهد بود.



جواب یک معادله دیفرانسیل

دانشگاه فنی و حرفه‌ای

جوابی از یک معادله دیفرانسیل را یک **جواب غیر عادی** یا **پوش** نامیده می‌شود هرگاه منحنی نمایش آن بر همه منحنی‌های جواب عمومی مماس باشد.

❖ معادلات دیفرانسیل خطی جواب غیرعادی ندارند.

❖ جواب غیرعادی تحت هیچ شرایطی از جواب عمومی بدست نمی‌آید.

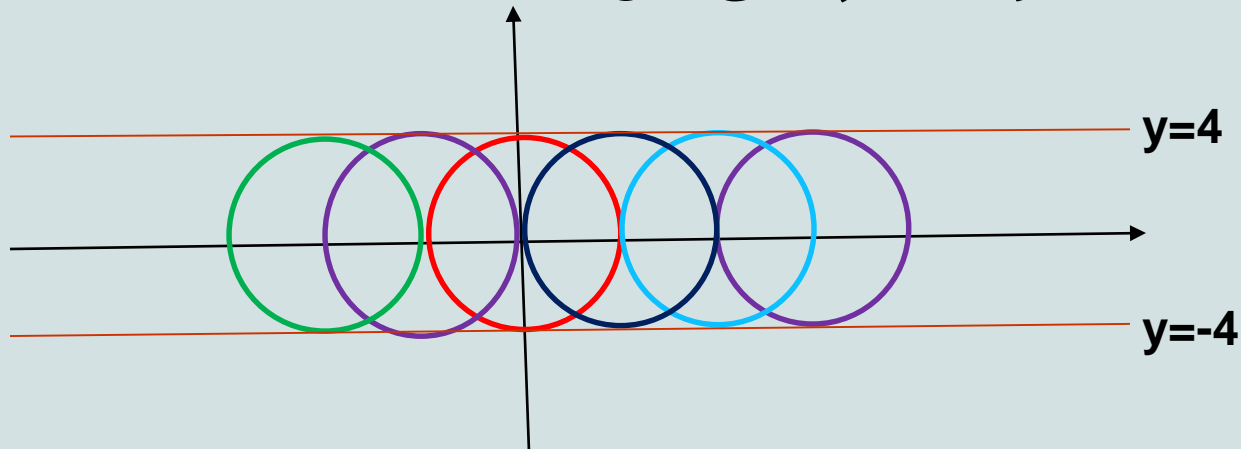


مثال

$$(x + c)^2 + y^2 = 16$$

جواب عمومی معادله $y^2(1 + y'^2) = 16$ می باشد و خطوط

$y = \pm 4$ جواب غیرعادی این معادله است.





محاسبه پوش

دانشگاه فنی و حرفه‌ای

برای محاسبه پوش یک معادله دیفرانسیل، در جواب عمومی نسبت به پارامتر c مشتق گرفته و پارامتر را حذف می‌کنیم تا پوش بدست آید.

$$\begin{cases} y = f(x, c) \\ \frac{dy}{dc} = \frac{df(x, y)}{dc} \end{cases}$$



مثال

پوش جواب عمومی $(x - c)^2 + y^2 = 4$ را بدست آورید.

$$2(-1)(x - c) + 0 = 0$$

$$\Rightarrow c = x$$

$$\Rightarrow (x - x)^2 + y^2 = 4$$

$$\Rightarrow y^2 = 4$$

$$\Rightarrow y = \pm 2$$



تمرین

برای جواب عمومی $y = cx + \frac{1}{c}$ پوش را محاسبه کنید.

(راهنمایی: جواب برابر $y^2 = 4x$)