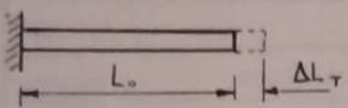
$$\delta l_c = 2\delta l_B = 2\left(\frac{R_B L_{EB}}{E_s A}\right) = \frac{2(103.225)(15)}{(30\times10^6)(\frac{\pi}{4})(0.1)^2} \cong 0.013 \text{ in}$$ (جواب قسمت ب)

تنش حرارتی :

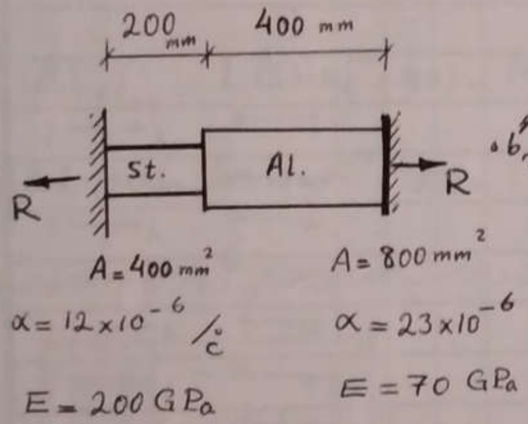
می دانیم اگر دو سر یک میله و یا یک سر آن آزاد باشد، در اثر افزایش دما و یا کاهش دما، میله به راحتی و بدون مقاومت تغییر طول خواهد داد. مقدار این تغییر طول از فرمول زیر محاسبه می شود



$$\Delta L_T = (L_0)(\alpha)(\Delta T)$$

که در آن L_0 طول اولیه میله، α ضریب انبساط طولی میله و ΔT تغییرات دما می باشد.

حال اگر به وسیله تکیه گاه یا یک مانعی از تغییر طول میله در نتیجه تغییر دما، جلوگیری به عمل آید در میله، نیروی داخلی و در نتیجه تنش به وجود خواهد آمد، که اگر میله در انقباض باشد، تنش، کششی است و اگر در انبساط باشد، تنش، فشاری است.



مثال: در $25^\circ C$ فاصله بین دو سر میله های فولادی و آلومینیمی و دو تکیه گاه موجود، صفر است و هیچگونه تنشی در میله ها وجود ندارد. اگر دمای سیستم را به اندازه $-60^\circ C$ کاهش دهیم، تنش های موجود در قسمت های فولادی و آلومینیمی چقدر است؟

حل: اگر یکی از تکیه گاه ها موجود نمی بود در اثر کاهش دما هر دو میله کوتاه (با مقادیر متفاوت) می شدند، مقدار کوتاه شدن میله ها از فرمول زیر قابل محاسبه است:

$$\Delta L_T = (\Delta L_T)_{st} + (\Delta L_T)_{Al} = \left[(L_0\alpha)\Delta T\right]_{st} + \left[(L_0\alpha)\Delta T\right]_{Al}$$

$$\Rightarrow \Delta L_T = \left[200(12\times10^{-6}) + 400(23\times10^{-6})\right](-60-25) = -0.986 \text{ mm}$$

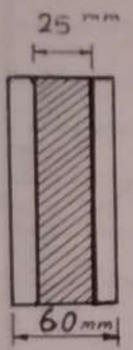
اما در عمل به دلیل ممانعت تکیه گاه ها طول کلی 600mm میله ثابت می ماند، بنابراین نیروی مخالف R مانع از کوتاه شدن طول میله ها می گردد. مقدار این نیرو برای هر دو جنس یکسان است و با توجه به اختلاف در جنس، سطح مقطع و طول دو بخش میله، تغییر طول هرکدام متفاوت خواهد بود و داریم:

$$|\Delta L_R| = |\Delta L_T|$$

$$\Delta L_R = \frac{R L_{st}}{E_{st} A_{st}} + \frac{R L_{Al}}{E_{Al} A_{Al}} = \left| R \left(\frac{200}{(200\times10^3)\,400} + \frac{400}{(70\times10^3)\,800} \right) \right| = \left| -0.986 \right| mm$$

$$\Rightarrow \boxed{R = 102251.8 \ N}$$

$$\sigma_{st} = \frac{R}{A_{st}} = \frac{102251.8}{400} \cong 255.63 \ MPa, \quad \sigma_{Al} = \frac{R}{A_{Al}} = \frac{102251.8}{800} \cong 127.81 \ MPa$$



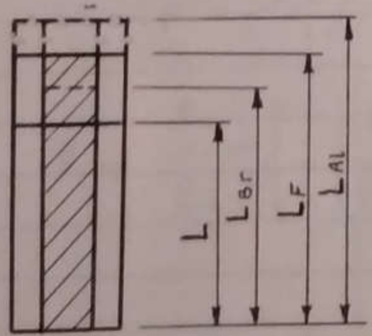
مثال: لوله آلومینیمی به طور کامل به هسته برنجی چسبانده شده است و در $15^\circ C$ هیچگونه تنش در سیستم (لوله، هسته) وجود ندارد. اگر تنها تغییر شکل‌های محوری سیستم را در نظر بگیریم و دمای آن را به $195^\circ C$ برسانیم، مقدار تنش‌های به وجود آمده در آلومینیم و برنج چیست؟

حل: اگر دو میله به هم متصل نبودند، تغییر طول هر کدام از آن‌ها در نتیجه افزایش دما به ترتیب زیر می‌بود.

$$(\Delta L_T)_{Al} = L(23\times10^{-6}\times180) = (4.14\times10^{-3})L$$

$$(\Delta L_T)_{Br} = L(19\times10^{-6}\times180) = (3.42\times10^{-3})L$$

بنابراین با توجه به اینکه تغییر طول آلومینیم بیشتر از برنج می‌بود، در این صورت در حالت اتصال فعلی، آلومینیم تحت فشار و برنج تحت کشش می‌باشد.



L : طول اولیه مساوی هر دو میله Al و Br

L_{Br} : طول میله برنجی در حالت آزاد به علت افزایش دما

L_{Al} : " " آلومینیمی " " " "

L_F : طول میله مرکب (میله متصل به هم آلومینیمی و برنجی) به علت افزایش دما

$(\Delta L_{Al})_P$ مقدار کاهش در تغییر طول میله آلومینیمی به دلیل چسبیدن به میله برنجی : $L_{Al} - L_F$

$(\Delta L_{Br})_P$ مقدار افزایش در تغییر طول میله برنجی به دلیل چسبیدن به میله آلومینیمی : $L_F - L_{Br}$

تغییر طول میله مرکب در اثر افزایش دما : $L_F - L = \Delta L$

$$A_A = \pi(30^2 - 12.5^2) = 2336.56 \ mm^2$$

$$A_{Br} = \pi(12.5^2) = 490.87 \ mm^2$$

معادله تغییر طول میله‌ها :

$$(\Delta L_{Al})_T - (\Delta L_{Al})_P = (\Delta L_{Br})_T + (\Delta L_{Br})_P$$

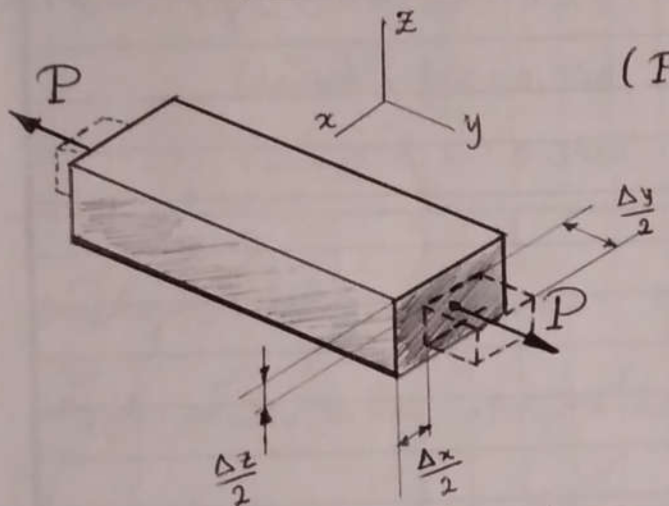
$$\rightarrow L(\alpha_{Al}\Delta T) - \frac{PL}{E_A A_A} = L(\alpha_{Br}\Delta T) + \frac{PL}{E_{Br} A_{Br}}$$

$$\Rightarrow (\alpha_A - \alpha_{Br})\Delta T = P\left(\frac{1}{E_A A_A} + \frac{1}{E_{Br} A_{Br}}\right)$$

$$\Rightarrow P = \frac{(\alpha_A - \alpha_{Br}) E_A A_A E_{Br} A_{Br} (\Delta T)}{E_{Br} A_{Br} + E_A A_A} = \frac{\left[(23-19)\times 10^{-6}\right](70\times 10^3)(2336.6)(105\times 10^3)(491)(180)}{\left[105\times 10^3(491) + 70\times 10^3(2336.6)\right]}$$

$$\Rightarrow P = 28223.5 \ (N)$$

$$\Rightarrow \sigma_{Al} = \frac{P}{A_{Al}} = \frac{28223.5}{2336.6} \cong 12.1 (MPa) \quad , \quad \sigma_{Br} = \frac{P}{A_{Br}} = \frac{28223.5}{491} \cong 57.5 (MPa)$$



نسبت پواسون : (ν) (Poisson's ratio)

اگر یک قطعه تحت تاثیر یک نیرو در امتداد محور قطعه ای مطابق شکل قرار گیرد در آن تنش تک محوری بوجود خواهد آمد. قطعه در امتداد نیرو کرنش مثبت (به دلیل افزایش طول) و در امتداد محورهای x و z نشان داده شده در شکل به دلیل کاهش ابعاد کرنش منفی خواهد داشت. کرنش در راستای امتداد نیرو را کرنش محوری و در راستاهای عمود بر امتداد نیرو (x و z) کرنش عرضی می نامیم و نسبت پواسون را به ترتیب زیر تعریف می کنیم.

$$\nu = \left|\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y}\right| = \left|\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_y}\right| = \left|\frac{\text{کرنش عرضی}}{\text{کرنش محوری}}\right|$$

بنابراین نسبت پواسون همواره یک مقدار مثبت است.

نسبت پواسون در محدوده صفر تا 0.5 تغییر می کند. (برای تمامی مواد) $0 < \nu < 0.5$

مطابق شکل بالا اگر نیروی محوری کششی باشد، کرنش در آن راستا (راستای نیرو) مثبت و در دو راستای دیگر منفی خواهد بود، لذا فرمول های زیر را خواهیم داشت:

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} > 0 \quad , \quad \varepsilon_x = \varepsilon_z = -\nu\,\varepsilon_y$$

مقادیر برخی از مواد، مقادیر ν در زیر آمده است.

ASTM_A36 فولاد ساختمانی : 0.2658

ASTM_A242 فولاد مستحکم کم آلیاژ : 0.2658

ASTM_A514 فولاد آلیاژی کوئنچ و تمپرشده : 0.2658

فولاد ضد زنگ نورد سرد شده : 0.3014

" " آنیل شده : 0.3014

چدن مالیبل (چکش خوار) : 0.2891

ASTM_A48، 4.5%C چدن خاکستری : 0.25

برنج (سرد-نورد شده) : 0.3461

" (آنیل شده) : 0.3461

فسفر برنز (سرد نورد شده) : 0.3415

[redacted]

شیشه : 0.1607

1100-H14 آلومینیم : 0.3461

2014-T6 " : 0.3333

6061-T6 " : 0.3269

مثال: میله‌ای به طول 500 mm و به قطر 16 mm را تحت بار محوری 12 kN قرار داده و مشاهده می‌کنیم که طول آن به اندازهٔ 300 μm افزایش و قطر آن به اندازهٔ 2.4 μm کاهش می‌یابد. مادهٔ میلهٔ مذکور همگن و ایزوتروپیک است. مدول الاستیسیته و نسبت پواسون این ماده را حساب کنید.

$L = 500\,mm$

$d = 16\,mm$

$P = 12000\,N$

$\Delta L = +300\,\mu m = 0.3\,mm$

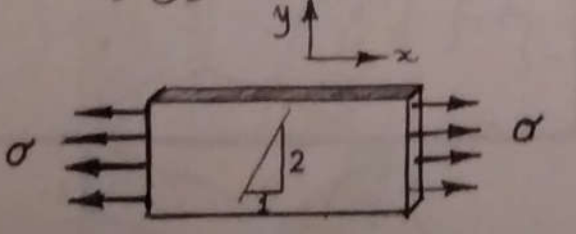
$\Delta d = -2.4\,\mu m = -0.0024\,mm$

$$E = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} = \frac{(P/A)}{(\Delta L/L)} = \frac{PL}{A\,\Delta L} = \frac{(12000)(500)}{\frac{3.14}{4}(16)^2\,(0.3)}$$

$$\Rightarrow \boxed{E = 99471.84\ MPa \cong 99.5\ GPa}$$

$$\nu = \left|\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}\right| \Rightarrow \nu = \left|\frac{(\Delta d)/d}{(\Delta L)/L}\right| \Rightarrow \boxed{\nu = \left|\frac{L(\Delta d)}{d\,(\Delta L)}\right| = \left|\frac{500(-0.0024)}{16\,(0.3)}\right| = 0.25}$$

مثال: یک صفحهٔ آلومینیمی تحت یک بار محوری-مرکزی قرار گرفته است، بار وارده موجب تنش قائم σ در آن شده است. قبل از بارگذاری، خطی با شیب 2:1 در روی این صفحه کشیده شده است، مطلوب است تعیین شیب خط مذکور درصورتی که $\sigma = 18\ ksi$ باشد. برای آلومینیم $E = 10\times10^6\ psi$ ، $\nu = 0.33$ فرض شود.



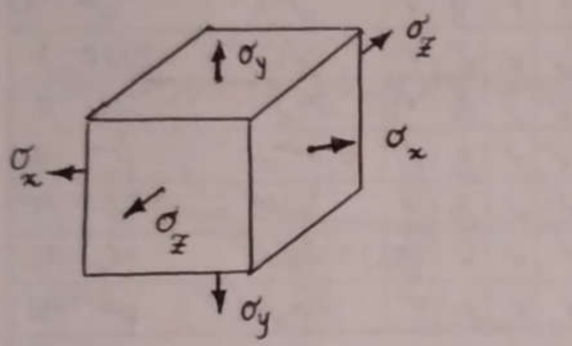
$$\text{شیب ثانویه} = \frac{2 - 2(\varepsilon_y)}{1 + 1(\varepsilon_x)} = \frac{2(1-\varepsilon_y)}{(1+\varepsilon_x)}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{18\times10^{3}}{10\times10^{6}} = 18\times10^{-4} \quad , \quad |\varepsilon_y| = \nu|\varepsilon_x| = 0.33(18\times10^{-4}) = 5.94\times10$$

$$\Rightarrow \text{شیب ثانویه} = 2\left[\frac{1-(5.94\times10^{-4})}{1+(18\times10^{-4})}\right] = 1.9952$$

(تنش سه محوره)

یک المان مکعبی (سه بعدی) را در نظر میگیریم که در سه راستای عمود بر وجوه آن یعنی x ، y و z تحت تنش قرار گرفته است. برای بدست آوردن مقادیر ε_x ، ε_y ، ε_z ابتدا اثر هر تنش در راستای خودش و سپس اثر هر تنش در دو راستای دیگر نوشته شده و در نهایت کرنش‌ها (ناشی از اثر مستقیم تنش و ناشی از تأثیرات دو تنش دیگر) با هم جمع می‌شوند، به عنوان مثال در راستای x ، خواهیم داشت:



$$\text{کرنش ناشی از } \sigma_x = \varepsilon_{x_1} = \frac{\sigma_x}{E} = \varepsilon_x$$

$$\text{کرنش ناشی از } \sigma_z = -\nu\varepsilon_z \qquad \text{و کرنش ناشی از } \sigma_y = -\nu\varepsilon_y$$

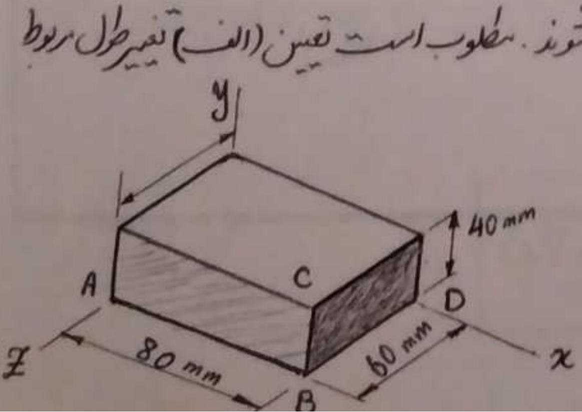
$$\Rightarrow \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu\varepsilon_y - \nu\varepsilon_z = \frac{\sigma_x}{E} - \nu\left(\frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right]}$$

به همین ترتیب عبارت‌های مربوط به ε_y , ε_z به ترتیب ذیل خواهد بود:

$$\boxed{\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right]} \quad \text{و} \quad \boxed{\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right]}$$

مثال: تمام سطوح قطعه فولادی مطابق شکل تحت فشار یکنواخت قرار گرفته اند. تغییر طول مربوط به ضلع AB برابر $-24\,\mu m$ است. مقادیر $E = 200\ GPa$ و $\nu = 0.29$ فرض می‌شوند. مطلوب است تعیین (الف) تغییر طول مربوط به دو ضلع دیگر (ب) فشار اعمالی به سطوح قطعه مذکور.



وقتی فشار بر تمام سطوح مکعب یکسان وارد می‌شود، خواهیم داشت: $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -P$

$$\Rightarrow \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{P}{E}(1-2\nu)$$

(الف) داریم: $\varepsilon_x = \dfrac{\Delta L_{AB}}{L_{AB}} = \dfrac{-24\times10^{-3}}{80} = -3\times10^{-4} = \varepsilon_y = \varepsilon_z$

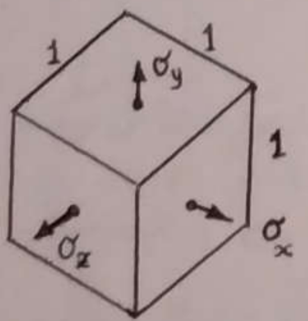
لذا می‌توان نوشت: $\Delta L_{BC} = \varepsilon_y (L_{BC}) = -3\times10^{-4}(40) = -12\times10^{-3}\ (mm) = -12\ \mu m$

و نیز می‌توان نوشت: $\Delta L_{BD} = \varepsilon_z (L_{BD}) = -3\times10^{-4}(60) = -18\times10^{-3}\ (mm) = -18\ \mu m$

(ب) از قسمت بالا داریم: $\varepsilon_x = -\frac{P}{E}(1-2\nu)$ لذا با جایگذاری مقادیر معلوم در رابطهٔ فوق‌الذکر خواهیم داشت:

$$-3\times10^{-4} = -\frac{P}{200(10)^3}\left[1-2(0.29)\right] \Rightarrow \underline{P = 142.9\ (MPa)}$$

(انبساط یا مدول حجمی)



یک المان مکعبی به طول ضلع واحد را در نظر می‌گیریم که تحت تاثیر سه تنش در راستای x و y و z قرار گرفته است، که در نتیجه این تنش‌ها در سه جهت کرنش‌های ε_x، ε_y و ε_z و در نتیجه تغییر طول به وجود خواهد آمد که نهایتاً باعث تغییر در حجم مکعب خواهد شد.

این تغییر حجم برای حجم واحد محاسبه می‌شود لذا خواهیم داشت:

تغییر حجم = حجم ثانویه − حجم اولیه

$$\Delta V = V_2 - V_1 = (1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z) - 1$$

$$\Delta V = 1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_x\varepsilon_z + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z - 1$$

از آنجا که مقادیر ε_x، ε_y و ε_z اعداد بسیار کوچکی هستند لذا حاصل ضرب یک جفت آن‌ها باهم و حاصل ضرب سه تایی آن‌ها برابر صفر خواهد بود، لذا خواهیم داشت:

$$\boxed{\Delta V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}$$

بنابراین تغییر در حجم، یک حجم واحد برابر با مجموع مقادیر کرنش ها در سه محور x و y و z. با جایگذاری مقادیر ε_x و ε_y و ε_z از روابط بدست آمده قبلی خواهیم داشت:

$$\Delta V = e = \left[\frac{\sigma_x}{E} - \nu\left(\frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}\right)\right] + \left[\frac{\sigma_y}{E} - \nu\left(\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_z}{E}\right)\right] + \left[\frac{\sigma_z}{E} - \nu\left(\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E}\right)\right]$$

$$\Rightarrow e = \frac{1}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) - \nu\left(\frac{2\sigma_x}{E} + \frac{2\sigma_y}{E} + \frac{2\sigma_z}{E}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{e = \frac{(1-2\nu)}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}$$

وقتی که جسم تحت فشار هیدرواستاتیک P قرار می‌گیرد مقدار e از رابطه زیر محاسبه خواهد شد:

$$e = \frac{(1-2\nu)}{E}(-P-P-P) \Rightarrow \quad \boxed{e = \left[-\frac{3(1-2\nu)}{E}\right]P}$$

در رابطهٔ فوق اگر عبارت $\frac{3(1-2\nu)}{E}$ را معادل $\frac{1}{k}$ در نظر بگیریم خواهیم داشت:

مدول حجمی (k) × تغییر حجم = فشار هیدرواستاتیک

$$\boxed{e = \frac{-P}{k}} \qquad \boxed{k = \frac{E}{3(1-2\nu)}}$$

ثابت k را مدول حجمی یا مدول فشاری ماده گویند. ثابت k دارای واحد از نوع واحد تنش می‌باشد.

از آنجا که جسم تحت فشار هیدرواستاتیکی کاهش حجم می‌دهد لذا در فرمول $e = \frac{-P}{k}$ ، k باید مقدار مثبت خواهد بود و چون E همواره مثبت است لذا مقدار $1-2\nu$ باید بزرگتر از صفر باشد، لذا داریم:

$$1 - 2\nu > 0 \Rightarrow \boxed{\nu < 0.5}$$

از طرف دیگر داریم که مقدار ν همواره مثبت در نظر گرفته می‌شود یعنی داریم:

$$\boxed{\nu > 0}$$

بنابراین محدودهٔ تغییرات ν بین حداقل (صفر) و حداکثر (0.5) می‌باشد.

$$\boxed{0 < \nu < 0.5}$$

اگر $\nu = 0$ در نظر گرفته شود نشانگر ماده‌ای است که کرنش عرضی در آن ماده در هنگام کشش یا فشار صفر است و

اگر $\nu = \frac{1}{2}$ فرض شود یعنی اینکه $k = \infty$ و نشانگر تغییر حجم صفر می‌باشد. $\left(e = \frac{-P}{k} = \frac{-P}{\infty}\right)$

بنابراین در حالت ایده‌آل زمانی که $\nu = 0$ است بیشترین تغییر حجم و زمانی که $\nu = \frac{1}{2}$ است کمترین

تغییر حجم (صفر) خواهیم داشت. این تغییر حجم که در واحد حجم صورت می‌گیرد و برای بدست آوردن تغییر حجم در یک حجم معلوم باید در عدد حجم مذکور ضرب شود.

مقدار ν در لاستیک مساوی 0.5 می‌باشد همانطور که از جدول صفحهٔ (۲۱) پیداست، برای شیشه حدود 0.16 می‌باشد، برای نوعی بتن حدود 0.1 است.

در آزمایش کشش تک محوری از آنجا که $\sigma_z = \sigma_y = 0$ و $\sigma_x > 0$ در نتیجه خواهیم داشت:

$$\Delta v = e = \frac{1-2\nu}{E}\left(\sigma_x + \cancel{\sigma_y} + \cancel{\sigma_z}\right) = \left[\frac{(1-2\nu)}{E}\right]\sigma_x$$

از آنجا که حداکثر مقدار ν ، 0.5 می‌باشد لذا همواره افزایش حجم وجود خواهد داشت.

مثال: قطعه فولادی نشان داده شده در مثال قبل تحت فشار هیدرواستاتیک $P = 180\,MPa$ قرار گرفته است. مطلوب است محاسبهٔ تغییر حجم ΔV آن. فرض کنید $E = 200\,GPa$ ، $\nu = 0.29$ می‌باشد.

$$V_1 = 80 \times 40 \times 60 = 192 \times 10^3 \ (mm^3)$$

$$\Delta V = e V_1 = V_1\left[\frac{-3(1-2\nu)P}{E}\right] \Rightarrow \Delta V = \left[\frac{-3(1-0.58)\,180}{200 \times 10^3}\right] \times (192 \times 10^3)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta V = -217.728 \ mm^3}$$