بسمه تعالی

دانشگاه فنی و حرفه ای

آموزش مجازی

مقاومت مصالح ۲

جلسه اول

مدرس: یوسف جعفری آزاد

مکانیک خودرو

۱۳۹۸

تبدیل های تنش و کرنش

* تبدیل تنش صفحه ای:

هدف : تعیین چگونگی تبدیل مؤلفه های تنش بر اثر چرخش محورهای مختصات است، در این مبحث به طور عمده به تنش صفحه ای می پردازیم.

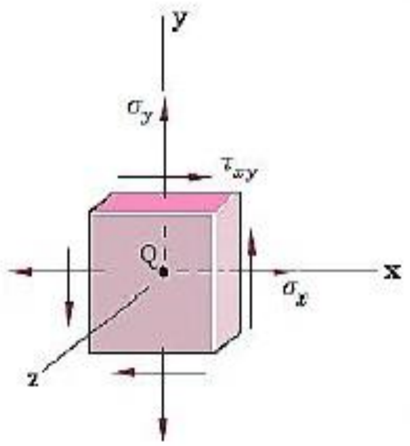
می دانیم تنش صفحه ای، **(Plane Stress)** حالتیست که در آن دو وجه جزء مکعبی فارغ از هرگونه تنش اند، اگر مثلاً محور z عمود بر این وجوه انتخاب شود آنگاه $\Leftarrow$

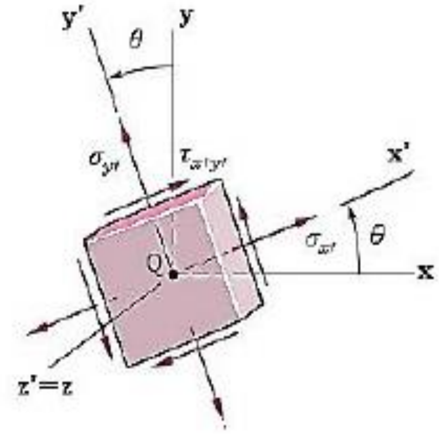
$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$$

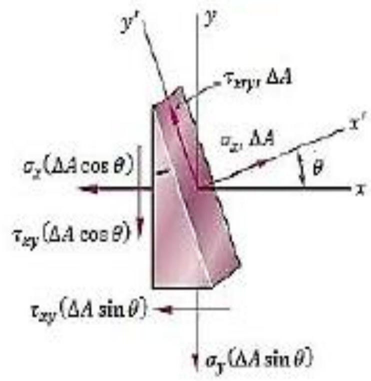
و تنها مولفه های باقی مانده عبارتند از : τ_{xy} و σ_y و σ_x

نکتهٔ: مخزنهای تحت فشار جدار نازک کاربرد مهمی از تحلیل تنش صفحه ای هستند.

- حال اگر المان تنش همانند شکل زیر باشد مقادیر تنشی که بر سطح مایلی(با زاویهٔ θ نسبت بـه صـفحه قائم)حاصـل مـی شود به قرار زیر است:







اگر از تعادل نیرو ها استفاده کنیم داریم :

$$\begin{cases} \sum f_{x'} = 0 \\ \sum f_{y'} = 0 \end{cases}$$

$$\sum f_{x'} = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta} \quad \rightarrow \quad 1-7$$

$$\sum f_{y'} = 0 \Rightarrow \boxed{\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta} \quad \rightarrow \quad 2-7$$

رابطهٔ تنش عمـودی $\sigma_{y'}$ را مـی تـوان بـا جـایگزین θ در معادلـهٔ (۷-۱) بـا زاویـهٔ $\theta + 90°$ کـه محـور y' بـا محـور x' تشکیل می دهد به دست آورد ⟵

$$\boxed{\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta} \quad \rightarrow \quad 3-7$$

نکتهٔ: مجموع تنش های عمودی بر دو سطح قائم پیوسته با هم برابر است و عدد ثابتی است. با جمع کردن عضو به عضو معادله های (۷-۱) و (۷-۳) می توان این موضوع را متوجه شد.

$$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y$$

- از آنجا که در تنش صفحه ای $\sigma_z = \sigma_{z'} = 0$ لذا مجموع تنش های عمودی وارد شده به جزء مکعب شکل مستقل از سمت گیری آن جزء است.

❋ تنش های اصلی(تنش عمودی ماکزیمم) و تنش برشی ماکزیمم:

معادله های (۷-۱) و (۷-۲) معادله های پارامتری دایره اند، یعنی اگر مجموعه ای از محور های متعامد انتخاب کنیم و به ازای هر مقدار معین پارامتر θ ، نقطهٔ M را طوری رسم نماییم که طول آن برابر با $\sigma_{x'}$ و عرض آن برابـر بـا $\tau_{x'y'}$ باشـد کلیـهٔ نقاطی که بدین ترتیب به دست می آیند بر روی یک دایره واقع می شوند.برای نشان دادن این خاصیت θ را از معادلـه هـای (۷-۱) و (۷-۲) حذف می نماییم:

توضیحات:

❶ در معادلهٔ $(1-7)$ $\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ را به سمت چپ برده و به توان 2 می رسانیم

❷ معادلهٔ $(2-7)$ را به توان 2 رسانده با معادلهٔ $(1-7)$ جمع می نماییم

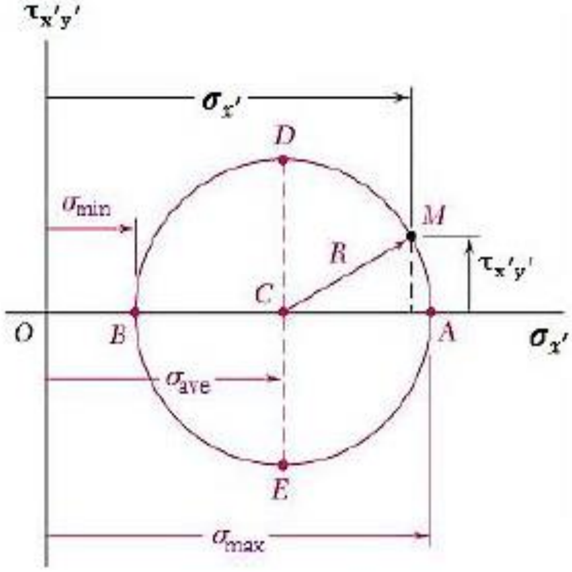
$$\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + {\tau_{x'y'}}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + {\tau_{xy}}^2$$

رابطهٔ فوق معادلهٔ دایره ای به شعاع R و به مرکز C به طول σ_{ave} و به عرض صفر:

$$\boxed{(\sigma_{x'} - \sigma_{ave})^2 + {\tau_{x'y'}}^2 = R^2} \quad \rightarrow \quad 4-7 \qquad \boxed{\sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}} \quad \rightarrow \quad 5-7$$

$$\boxed{R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + {\tau_{xy}}^2}} \quad \rightarrow \quad 6-7$$

❋ در شکل زیر نقاط A و B که از تقاطع دایره با محور افقی به دست می آیند دارای خاصیت مهمی هستند. نقطهٔ A متناظر با مقدار ماکزیمم و نقطهٔ B متناظر با مقدار مینیمم تنش عمودی $\sigma_{x'}$ است و نیز مقدار تنش برشی در هر دو نقطه صفر است.



شکل $(2-7)$ $\Leftarrow$

توضیحات:

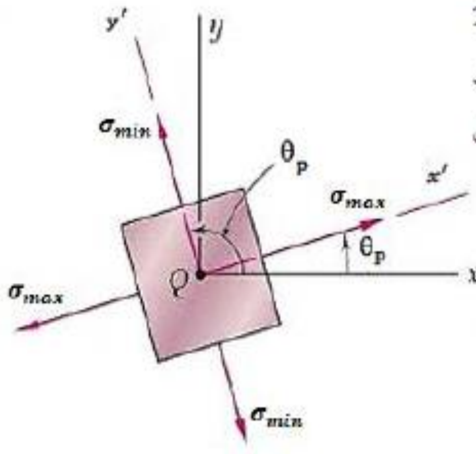
* اگر در معادلهٔ $(2-7)$ $\Leftarrow$ $\underline{\tau_{x'y'}=0}$ پس مقادیر θ_p پارامتر θ را که متناظر با نقاط A و B است به ما نشان می دهد

$$\boxed{\tan 2\theta_p=\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}} \quad \rightarrow \quad 7-7$$

در مقاومت ۱ نیز خواندیم،(سطوحی که تنش برشی روی آنها صفر است دارای تنش عمودی ماکزیمم اند).

اکنون به این تنش ها ، تنش های اصلی می گوییم و صفحهٔ شامل این تنش ها را صفحات اصلی. این سطوح از رابطهٔ بالا به دست می آیند.

* از رابطهٔ (۷-۷) دو جواب برای θ_p به دست می آید که با هم $180°$ اختلاف دارند و در نتیجه دو مقدار θ_p با یکدیگر $90°$ اختلاف خواهند داشت، از هر دو این مقدارها می توان برای سمت گیری جزء کوچک متناظر استفاده نمود.



شکل $(3-7)$ $\Leftarrow$

از شکل (۷-۲) داریم :

$$\sigma_{max} = \sigma_{ave} + R$$

$$\sigma_{min} = \sigma_{ave} - R$$

پس داریم $\Rightarrow$ $\boxed{\sigma_{max} \text{ و } \sigma_{min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}$ $\rightarrow$ 8 – 7

❋ علامت $(+)$ را برای $\underline{\sigma_{max}}$ و علامت $(-)$ را برای $\underline{\sigma_{min}}$ قرار می دهیم.

توجه : اگر یکی از مقادیر θ_p را در معادلهٔ (۷-۱) بگذاریم تعیین می شود کدام یک از این صفحات متناظر با مقدار تنش عمودی است.

❋ با مراجعهٔ مجدد به دایرهٔ شکل (۷-۲) داریم:

در نقاط D و E $\Longrightarrow$ $\tau_{x'y'}$ ماکزیمم است

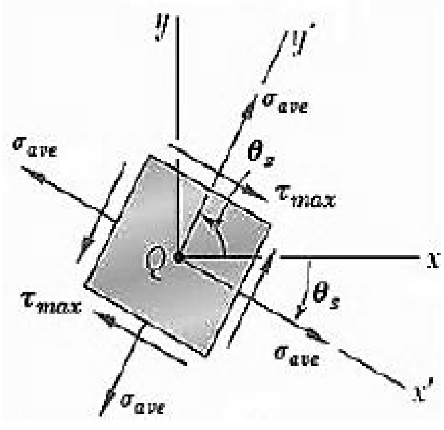
مقادیر $\underline{\theta_s}$ پارامتر θ را که متناظر با نقاط D و E است، نشان می دهد.

طول این نقاط $\boxed{\sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}}$ می باشد ، پس با قرار دادن $\underline{\sigma_{x'} = \sigma_{ave}}$ داریم:

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta_s + \tau_{xy} \cos 2\theta_s = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}} \quad \rightarrow \quad 9-7$$

❋ از رابطهٔ (۷-۹) دو جواب برای $2\theta_s$ به دست می آید که با یکدیگر $180°$ اختلاف دارند و در نتیجه دو مقدار θ_s با یکدیگر $90°$ اختلاف خواهند داشت. از هر دو مقادیر به دست آمده می توان برای سمت گیری جزء کوچک متناظر استفاده نمود.



شکل (7 – 4) $\Leftarrow$

با مقایسهٔ(7_7) و (9_7)داریم ← $tan\, 2\theta_S$ معکوس منفی $tan\, 2\theta_P$است ← زاویه های$2\theta_S$ و $2\theta_P$ با یکدیگر$90°$اختلاف دارند

یا زاویه های θ_S و θ_P با یکدیگر $45°$ اختلاف دارند ⇐ صفحه های تنش برشی ماکزیمم با صفحه های اصلی زاویهٔ $45°$ می سازند

⇐ موضوعی که در بالا بیان شد مطالب مربوط به مقاومت (1) را مجددا تأیید می کند .

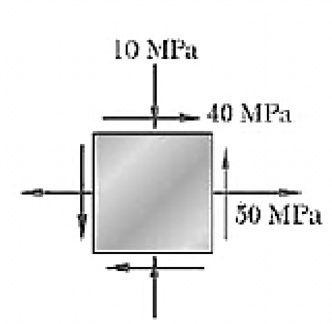
با توجه به شکل (۷-۲) که در آن مقدار تنش برشی ماکزیمم برابر شعاع دایره است پس داریم :

$$\boldsymbol{\tau_{max} = R}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2}} \qquad \mathbf{9-7}$$

تنش برشی ماکزیمم در صفحه

مثال ۱.۷ :



در حالت تنش صفحه ای نشان داده شده در شکل روبه رو مطلوبست:

الف) صفحه های اصلی ب) تنش های اصلی

ج) تنش برشی ماکزیمم و تنش عمودی متناظر با آن

حل) الف) صفحه های اصلی :

$\sigma_x = 50$ MPa , $\sigma_y = -10$ MPa , $\tau_{xy} = 40$ MPa $\Rightarrow$ $\underline{\mathbf{7-7}}$ ← جایگزین در معادلهٔ

$$\boldsymbol{tan\,2\theta_P} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2(40)}{50-(-10)} = \frac{80}{60}$$

$\mathbf{2\theta_P} = 53.1°$ و $180° + 53.1° = 233.1°$

$\boldsymbol{\theta_P} = 26.6°$ و $116.6°$

ب) تنش های اصلی :

از $\mathbf{8-7}$ داریم $\Rightarrow \sigma_{max}$ و $\sigma_{min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{50-10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{50+10}{2}\right)^2 + (40)^2}$

$\sigma_{max} = 20 + 50 = 70\ MPa$

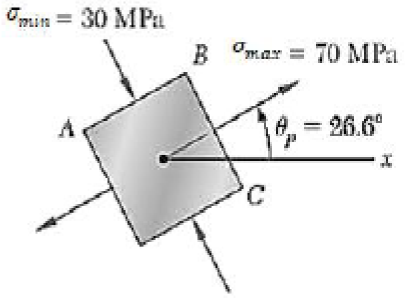
$\sigma_{min} = 20 - 50 = -30\ MPa$

ادامهٔ حل قسمت (ب)

با قرار دادن $\theta = 26.6^\circ$ در معادلهٔ (۷-۱) داریم :

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta + \boldsymbol{\tau_{xy}} \sin 2\theta = \frac{50-10}{2} + \frac{50+10}{2}\cos 53.1^\circ + \tau_{xy}\sin 53.1^\circ$$

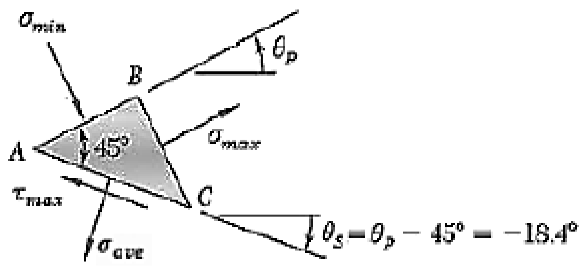
$$\Longrightarrow\ = 70\ MPa \iff \boldsymbol{\sigma_{max}} = 70\ MPa$$



ج) تنش برشی ماکزیمم :

$$\underline{\textbf{9 - 7}\ \text{رابطهٔ}} \Longrightarrow \boldsymbol{\tau_{max}} = \sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{\sigma_x - \sigma_y}}{\mathbf{2}}\right)^2 + \boldsymbol{\tau_{xy}}^2} = \sqrt{30^2+40^2} = 50\ MPa$$

نکتهٔ: از آنجا که وجه های ***AB*** و ***BC*** از جزء نشان داده شده در بالا، صفحه های اصلی می باشند، لذا صفحهٔ قطری ***AC*** باید یکی از صفحه های تنش برشی ماکزیمم باشد.



می دانیم : $\Longrightarrow \boldsymbol{\sigma_{ave}} = \frac{\boldsymbol{\sigma_x + \sigma_y}}{\mathbf{2}} = \frac{50-10}{2} = 20\ MPa$

$$\boldsymbol{\theta_S = \theta_p - 45^\circ = -18.4^\circ}$$