ساده سازی توابع بول

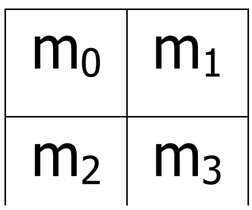
نقشه ، دیاگرام متشکل از تعدادی مربع است . هر مربع نشان دهنده یک مینترم می باشد و جون هر تابع بول را میتوان بصورت مجموع مینترم ها نمایش داد ، لذا یک تابع بول را می توان بصورت مصور با در نظر گرفتن نواحی اشغال شده بوسیله مربع هایی که مینترم آنها درتابع وجود دارد مشخص نمود . در واقع نقشه یک دیاگرام از کلیه روشهای ممکن برای ارائه استاندارد یک تابع می باشد . با استخراج الگوهای مختلفی از جدول ، استفاده کننده می تواند عبارت جبری معادل ولی ظاهراً متفاوتی را برای یک تابع بدست آورد و از بین آنها ساده ترین را انتخاب کند . ما فرض خواهیم کرد که ساده ترین عبارت جبری در میان جمع حاصلضرب ها یا ضرب حاصلجمع ها ، عبارتی است که تعداد متغیرهای آن کمترین باشد .

یک نقشه دو متغیره در شکل (۱-۳) نشان داده شده است که دارای چهار مینترم برای دو متغیر است . بنابراین نقشه شامل چهار مربع بوده و هر مربع مربوطه به یک مینترم است . برای نشان دادن ارتباط بین دو متفیر و مربعها در قسمت (ب) نقشه دوبار کشیده شده است . ۰ ها و ۱ هایی که برای هر سطح و ستون گذاشته شده مشخص کننده مقادیر متفیر x و y است . توجه کنید که x در سطر ۰ با پریم و در سطح ۱ بدون پریم ظاهر شده است . y ستون ۰ ، با پریم ، و در ستون ۱ بدون پریم آمده است .

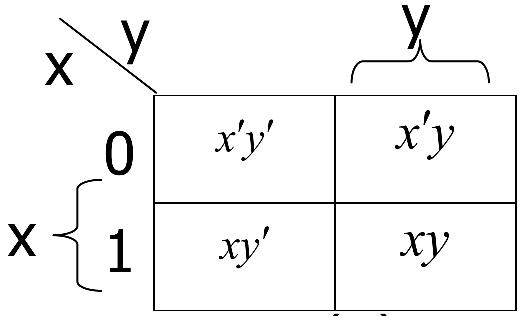
اگر مربعهایی که از مینترم آنها متعلق به تابع مفروضی است با علائمی مشخص کنیم روش مفید دیگری جهت نمایش هر یک از ۱۶ تابع ممکن از دو متغیر بدست می آید. بعنوان مثال ، تابع xy در شکل (۲-۳ الف) نشان داده شده است . از آنجا که xy برابر با m_3 می باشد در مربع مربوط به m_3 ، ۱ قرار گرفته است . بطور مشابه تابع x+y نیز در نقشه شکل (۲-۳ب) بوسیله سه مربعی که با ۱ پر شده اند مشخص شده است . این مربعها از مینترم های تابع بدست آمده اند :

$$x + y = x'y + xy = m_1 + m_2 + m_3$$

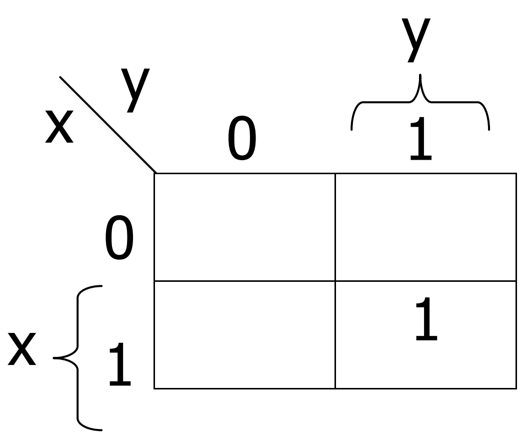
همچنین می توان سه مربع را از اشتراک متغیر x در سطر دوم و متغیر y در ستون دوم که ناحیه متعلق به x یا y را در بر می گیرد بدست آورد .



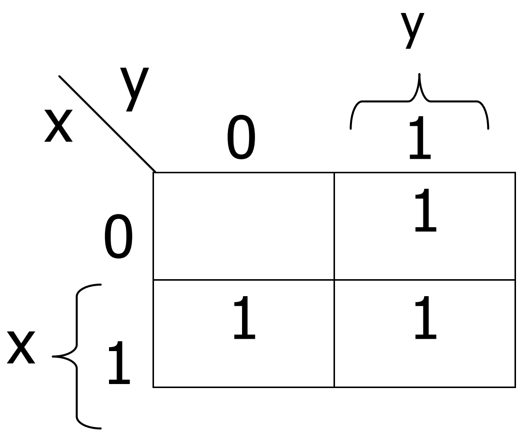
(الف)



(ب)



xy (الف)



x+y (ب)

یک نقشه سه متغیره در شکل (۳-۳) نشان داده شده است . هشت مینترم برای سه متغیر دودویی وجود دارد ، بهمین جهت نقشه دارای هشت مربع است . توجه

کنید که مینترم ها بر اساس ترتیب دودویی مرتب نشده اند بلکه ترتیبشان بر اساس کد گری فهرست شده در جدول (۴-۱) است . خاصیت این ترتیب این است که از هر مربع به مربع دیگر فقط یک بیت از ۰ به ۱ و یا از ۱ به ۰ تغییر می کند . نقشه ای که در قسمت (ب) کشیده شده با شماره هایی برای هر سطر و هر ستون علامت گذاری شده است تا ارتباط مربعها و سه متغیر را نشان بدهد . مثلاً مربعی که به m_5 نسبت داده شده به سطر ۱ و ستون ۰۱ مربوط است . وقتی این دو عدد به هم ملحق می شوند ، عدد دودیی ۱۰۱ را می سازد که معادل عدد ۵ است .از دید دیگری می توان مربع $m_5 = xy'z$ را مورد توجه قرار دارد ، به این شکل که بگوییم m_5 در سطر مربوط به x و ستون متعلق به z' قرار گرفته است . (س تون ۰۱) توجه کنید که هر متغیر در چهار مربع ۰ . چهار مربع دیگر ۱ است . بخاطر سهولت ، متغیردر خانه های ۱ بدون پریم و در خانه های ۰ با پریم ظاهر می شود . برای سادگی ، اسیم متغیر را با سمبل حرفی اش در زیر خانه هایی که بدون پریم هستند می نویسیم .

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6

(الف)

x \ yz	00	01	11 (y)	10 (y)
0	$x'y'z'$	$x'y'z$	$x'yz$	$x'yz'$
x 1	$xy'z'$	$xy'z$	xyz	xyz'

(ب)

شکل (۳-۳) نقشه سه متغیره

جهت درک فایده نقشه در ساده سازی توابع بول می بایست خاصیت مربع های همجوار را مشخص کنیم . تنها اختلاف بین هر دو مربع در یک متغیر می باشد.تابع

$F(x,y,z)=\sum(5,7)$ را در نظر بگیرید. در نقشه کارنو m_5 , m_7 را ۱ و سایر خانه ها با ۰ پر می گردند. با توجه به اصول جبر بول نتیجه میگیریم که می توان جمع دو مینترم در مربع های همجوار را به AND با دو متغیر ساده کرد به منظور روشن شدن مطلب به جمع دو مربع همجوار m_5 , m_7 توجه کنید .

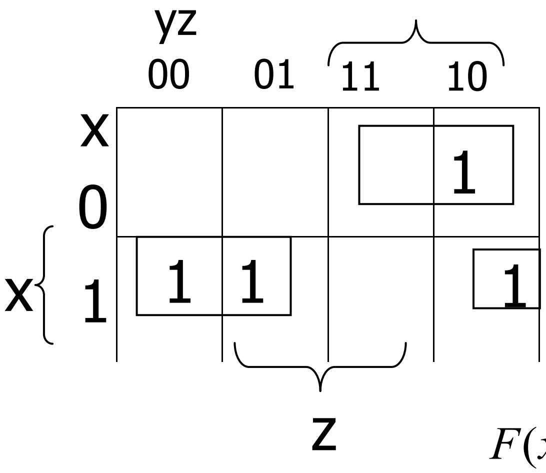
$$m_5+m_7=xy'z+xyz=xz(y'+y)=xz$$

در اینجا دو مربع در متغیر y اختلاف دارند که می توان بهنگام جمع آن را حذف کرد . بنابراین هر دو مینترم در دو مربع همجوار که با هم OR شده اند سبب حذف متغیری می گردند که در آن دو مینترم ، متفاوت است . مثالی زیر روالی را برای می نیمم کردن یک تابع بول بوسیله جدول بیان می کند .

مثال (۱-۳) : تابع بول زیر را ساده کنید .

$$F(x,y,z)=\sum(2,3,4,5)$$

ابتدا در خانه هايي كه مينترم هاي آن در تابع وجود دارد ۱ می گذاریم . این کار در شکل (۴-۳) که در آن مربع هاي مربوط به مينترم هاي ۰۱۰ ، ۰۱۱ ، ۱۰۰، ۱۰۱، با ۱ علامت زده شده اند قدم بعدي يافتن مربع هاي همجوار است . این کار در نقشه با مربع مستطيلي كه دو عدد ۱ را در بر مي گيرد صورت گرفته است . مستطيل بالاي سمت راست ناحيه اي را که زیر پوشش $x'y$ است شامل مي شود. بطور مشابه مستطیل پایین سمت چپ جمله ضرب xy' نشان می دهد. (سطر دوم نشان دهنده x و دو ستون سمت نیز نتیجه خواهد داد و در نتیجه $F=x'y+xy$



شکل (۴-۳) نقشه مثال ۱-۳

$$F(x.y.z)=\sum(2.3.4.5)=x'y+xy'$$

حالاتی وجود دارند که در آنها دو مربع مجاورند حتی اگر بهم نچسبیده باشند . در شکل (۳-۳) ، m_0 مجاور m_2 و m_4 مجاور m_6 است زیرا مینترم ها تنها با یك تغییر با هم حل اختلاف دارند .

این مطلب بصورت جبري قابل اثبات است .

$$m_0+m_2=x'y'z'+x'yz'=x'z'(y'+y)=x'z'$$
$$m_4+m_6=xy'z'+xyz'=zx'(y'+y)=xz'$$

در نتیجه ما باید تعریف همجواري مربع هاي را براي منظور نمودن مورد فوق یا موارد مشابه دیگر تصحیح کنیم . این تصحیح بدین صورت انجام مي گیرد که نقشه کشیده شده در یك سطح ، از دو لبه سمت چپ و راست مجاور تصور مي شوند.

مثال ۳-۲ : تابع زیر را ساده کنید .

$$F\,(x\,,y\,,z\,)=\sum\,3\,,4\,,6\,,7\,)$$

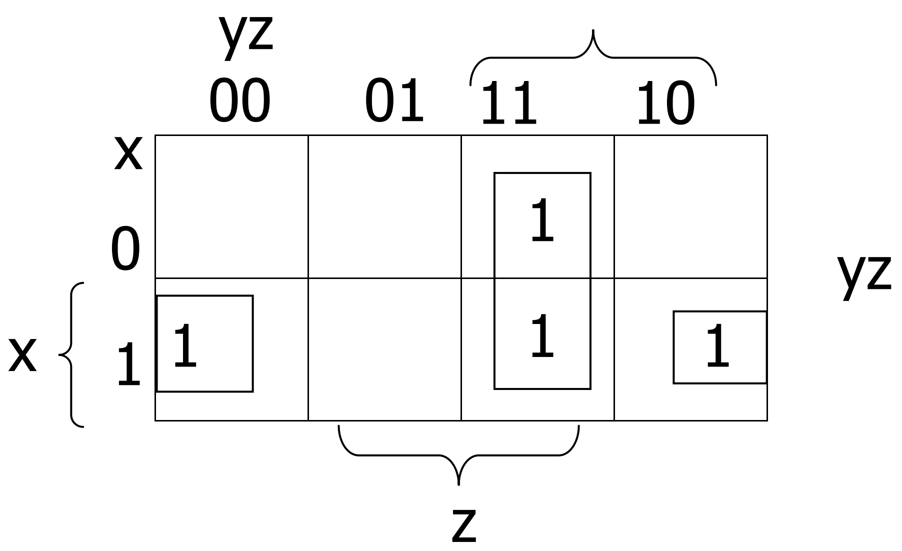
نقشه این تابع در شکل (۵-۳) نشان داده شده است . چهار مربع که هر کدام مربوط بهیک مینترم از تابع می باشد با ۱ پر می شود . دو مربع همجوار در ستون سوم با هم ترکیب شده اند تا عبارت xy را بوجود آورند . ضمناً دو مربع باقیمانده که دارای ۱

هستند با توجه به تعریف جدید همجوار می باشند و در دیاگرام بوسیله یک جفت نیم مستطیل مشخص شده اند . این دو مربع پس ازترکیب ، تابع بولی ساده شده عبارتست از :

$$F = yz + xz'$$

حال به ترکیب چهار مربع همجوار در یک نقشه سه متغیره توجه کنید . چنین ترکیبی نشان دهنده جمع چهار مینترم همجوار است و نتیجه این ترکیب فقط یک عبارت یک متغیره خواهد بود . بعنوان مثال جمع چهار همجوار ۰،۲،۴،۶، به عبارت z' تقلیل می یابد .

$$\begin{aligned} m_0 + m_2 + m_4 + m_6 &= x'y'z' + x'yz' + xy'z' + xyz' \\ &= x'z'(y' + y) + xz'(y' + y) = x'z' + xz' \\ &= z'(x' + x) = z'(x' + x) = z' \end{aligned}$$



شکل (۳-۵) نقشه براي ۲-۳

$$F(x.y.z) = \sum(3.4.6.7) = yz + xz = yz + xz'$$

تعداد مربعات همجواری که ممکن است ترکیب شوند همواره برابر عددی که توانی از دو است ، مانند ۸،۲،۴،۱ که هر چه تعداد بیشتری از مربعات همجواری ترکیب شوند جمله حاصلضرب منتجه دارای تعداد کمتری متغیر است .

یک مربع که یک مینترم را نمایش می دهد دارای سه متغیر است .

دو مربع همجوار نشان دهنده یک جمله یا دو متغیر است .

چهار مربع همجوار نشان دهنده یک جمله با یک متغیر است .

هشت مربع همجوار که تمام نقشه را در بر می گیرند همواره تابع ۱ راتولید می نماید .

مثال ۳-۳: تابع بول زیر را ساده کنید .

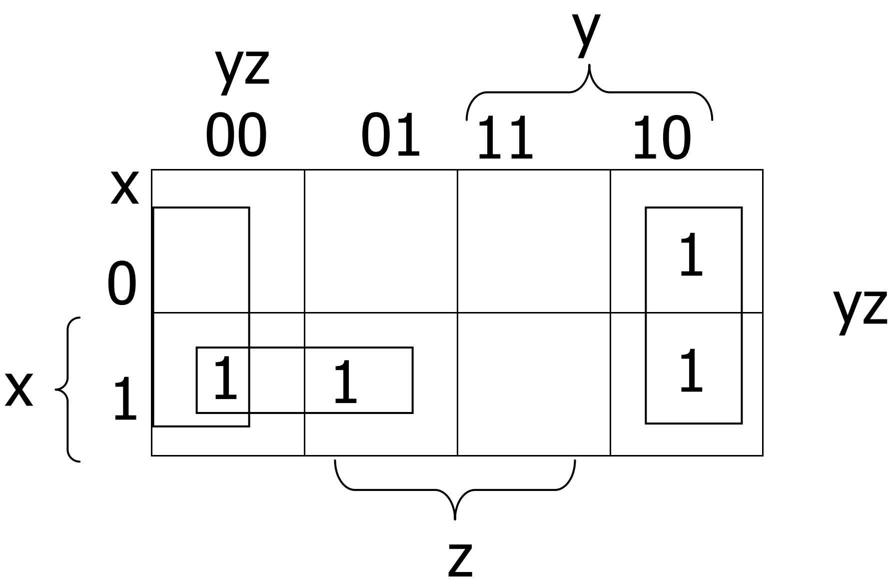
$$F(x.y.z)=\sum 0,2,4,5,6)$$

نقشه تابع f در شکل (۶-۳) نشان داده شده است . ابتدا ، ما چهار مربع مجاور را در اولین و آخرین ستون ترکیب می نماییم تا جمله z' از آن حاصل شود . تنها مینترم باقیمانده که متعلق به مینترم ۵ است با مربع مجاورش که قبلاً ترکیب شده است . این نه تنها مجاور است بلکه مفید نیز هست . چون دو مربع مجاور جمله دومتغیره xy' رابدست می دهد در حالیکه یک مربع تنها به جمله سه متغیره $xy'z$ متعلق است . تابع ساده شده عبارتست از

$F=z'+xy'$

اگر تابعی بصورت جمه مینترم ها بیان نشده باشد ، می توان از نقشه برای تهیه مینترم ها استفاده کرد و سپس تابع را بمنظور کاهش به حداقل متغیرها ساده نمود . البته لازم است که عبارت جبری حتماً بصورت جمع حاصلضرب ها باشد . هر جمله

ضرب قابل نشان دادن در یک ، دو یا چند مربع است . سپس مینترم های تابع مستقیماً از جدول استنتاج می گردند .



شکل (۶-۳) نقشه مثال ۳-۳ $F(x.y.z)=\sum(0.2.4.5.6)=z'+xy'$

مثال ۴-۳ : تابع بول مفروض زیر را :

$$F = A'C + A'B + AB'C + BC$$

الف) بصورت مجموع مینترم ها نماشی دهید .

ب) تابع می نیمم را بصورت جمع حاصلضرب بدست آورید .

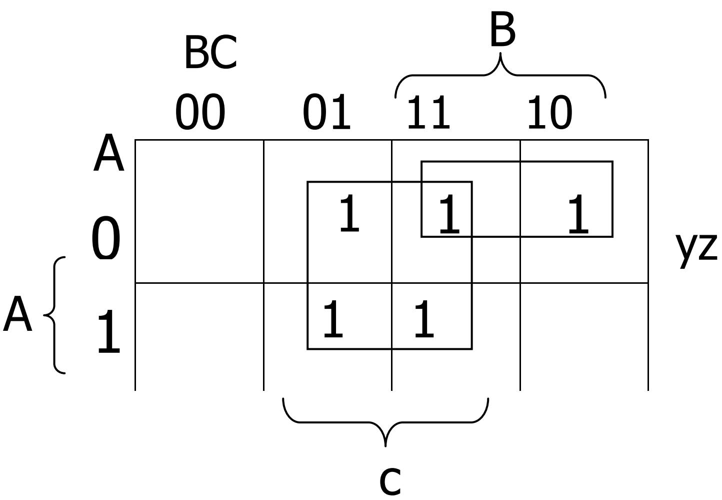
سه جمله ضرب در عبارت دارای دو متغیر بوده و در هر نقشه هر یک بوسیله دو مربع نشان داده شده اند . دو مربع مربوط به اولین جمله $A'C$ در شکل (۷-۳) از تلاقی َA (اولین سطر) با C (دو ستون وسط) یافت می شوند . که مربع های ۰۰۱ و ۰۱۱ خواهندبود .

توجه کنید که وقتی داخل مربع ها را با ۱ علامت می گذارید احتمال یافتن یک ۱ ، حاصل از جمله قبل در آن وجود دارد . این در دومین جمله یعنی $A'B$ ملاحظه می گردد که یک ۱ در حاصل ۰۰۱ و ۰۱۰ قرار دارد ولی مربع ۰۰۱ با $A'C$ مشترک است

لذا تنها ۱ علامت گذاری می شود . ادامه کار بترتیب فوق نشان می دهد که $AB'C$ مربوط به مربع ۰۱۰ است که متعلق به مینترم ۵ می باشد و جمله BC نیز دارای دو ۱ در مربعات ۰۰۱ و ۱۱۱ است . پس تابع کلاً دارای پنج مینترم است که در نقشه شکل با پنج ۱ مشخص گردیده است . مینترم ها که مستقیماً از نقشه خوانده می شوند و عبارتند از ۵,۳,۲,۱ و ۷ . تابع را می توان بر حسب مجموع مینترم ها نشان داد .

$$F(A,B,C)=\sum(1,2,3,5,7)$$

بنابراین عبارت مجموع حاصلضرب های اولیه دارای تعداد قابل ملاحظه ای مینترم است . می توان همانطور که در نقشه دیده می شود آن را ساده کرد بطوری که فقط دو متغیر داشته باشد .



شکل (۳-۷) نقشه براي مثال ۳-۴ $A'C+A'B+BC=C+A'B$

۳-۳ نقشه چهار متغیره

در شکل (۳-۸) نقشه مربوط به توابع بول با چهار متغیر مشاهده می شود .در (الف) شانزده جمله مینترم ، فهرست گردیده و به هر کدام یک مربع نسبت داده شده است . در حالت (ب) نقشه دو مرتبه رسم شده تا بیانگر ارتباط بین چهار متغیر

باشد . دریفها و ستونها بر اساس ترتیب کد گری شماره گذاری شده اند ، که بین دو سطر و یا دو ستون همجوار یک تغییر رقم وجود دارد . مینترم مربوط ستون دوم (۰۱) که وقتی به هم ملحق شوند حاصل عدد دودویی ۱۱۰۱ است و معادل عدد ۱۳ دهدهی می باشد .بنابراین مربع ردیف سوم و ستون دوم عبارت m_{13} را نشان میدهد . یک مربع که یک جمله مینترم را نمایش می دهد دارای چهار متغیر است .دومربع همجوار نشان دهنده یک عبارت با سه متغیر است .چهار مربع همجوار نشان دهنده یک عبارت با دو متغیر است . هشت مربع همجوار یک عبارت با یک متغیر را نشان می دهد . شانزده مربع همجوار نشان دهنده تابعی معادل ۱ است .

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6
M_{12}	M_{13}	M_{15}	M_{14}
M_8	M_9	M_{11}	M_{10}

(الف)

wx \ yz	00	01	11	
00	$w'x'y'z'$	$w'x'y'z$	$w'x'yz$	$w'x'yz'$
01	$w'xy'z'$	$w'xy'z$	$w'xyz$	$w'xyz'$
11	$wxy'z'$	$wxy'z$	$w'x'yz$	$w'x'yz'$
10	$wx'y'z'$	$wx'y'z$	$wx'yz$	$wx'yz'$

y

w

z

(ب)

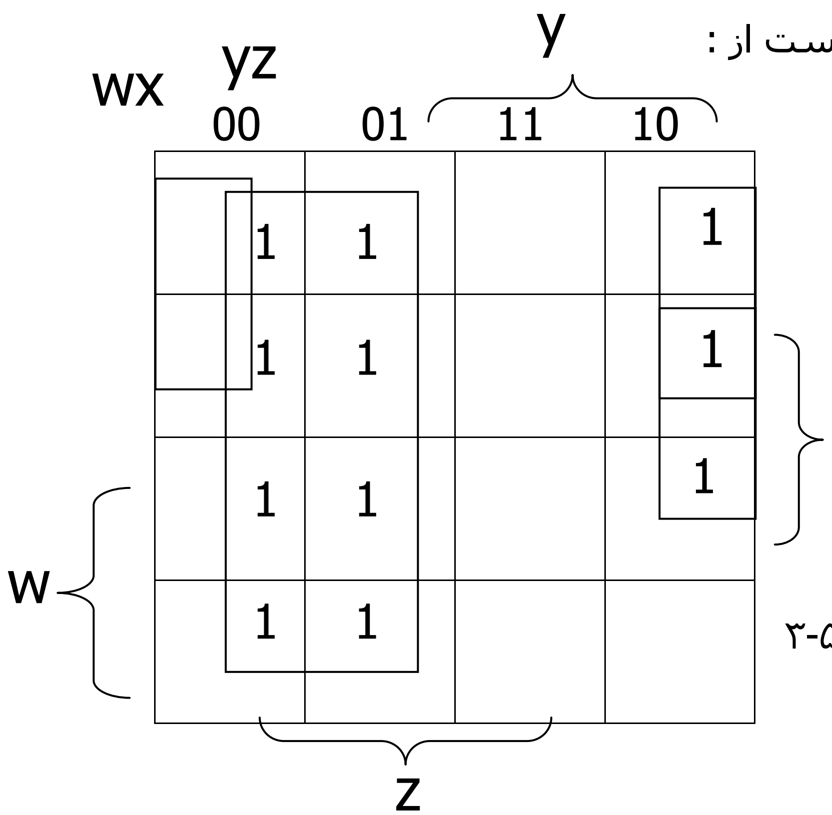
شکل (۸-۳): نقشه چهار متغیره

مثال ۵-۳ : تابع بول زیر را ساده کنید :

$$F(w.x.y.z) = \sum(0,1,2,4,5,6,8,9,12,13,14,)$$

چون که تابع چهار متغیره دارد یک نقشه چهار متغیره باید بکار رود . هشت مینترم سمت چپ با هم ترکیب شده تا عبارت تک متغیره y' نتیجه شود . سه ۱ باقیمانده در سمت راست میتوانند با هم ترکیب شوند تا عبارت ساده تری حاصل گردد : آنها می بایست بصورت و یا چهار مربع همجوار ترکیب شوند . نتیجه افزایش تعداد مربعهای همجوار ترکیب شده و عبارت $w'z'$ را تولیدمیکنند . یادآوری می شود که استفاده از یک مربع بیش از یک بار مجاز است . حال یک مربع دارای ۱ در سطر دوم و ستون چهارم باقی می ماند ، (مربع ۱۱۱۰) . بجای اینکه تنها یاین مربع را در نظر بگیریم (که عبارت با چهار متغیر را تولید می کند) آن را با مربع هایی که قبلاً برای تشکیل ناحیه ای با چهار مربع همجوار بکار رفته بود ترکیب می کنیم . حاصل ترکیب این مربعها که شامل دو سطر وسطی ودو ستون آخر می باشند عبارت xz' خواهد بود .در نهایت تابع ساده شده عبارتست از :

$$F = y' + w'z' + xz'$$



شکل (۹-۳) نقشه مثال ۵-۳

مثال ۶-۳: تابع بولی زیر را ساده کنید .

$$F = A'B'C' + B'CD' + A'BCD' + AB'C'$$

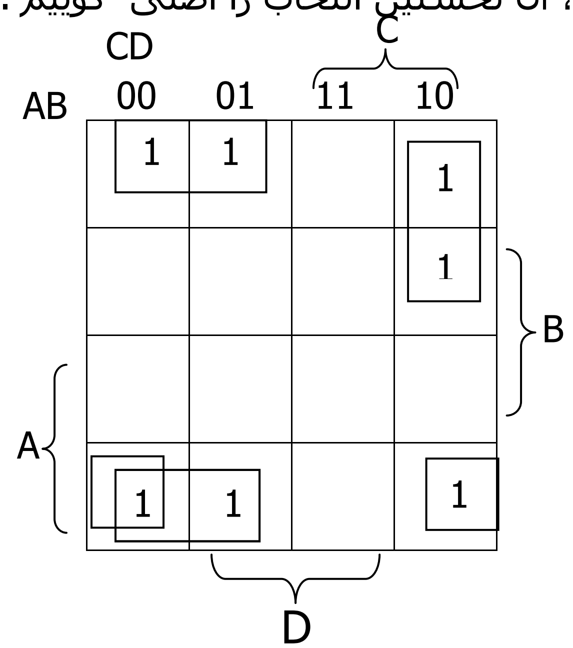
ناحیه ای از نقشه که بوسیله این تابع پوشیده می شود شامل مربعهایی است که در شکل (۱۰-۳) با عدد ۱ پر شده اند . این تابع چهار متغیر دارد و همانطور که ملاحظه شد شامل سه جمله هر یک با سه متغیر و یک جمله با چهار متغیر است . جملات سه متغیره در نقشه با دو مربع نشان داده شده اند . مثلاً $A'B'C'$ بوسیله مربعهای 0000 و 0001 مشخص شده است . تابع را می توان بوسیله ترکیب ۱ های چهار گوشه نقشه ساده کرد کو عبارت $B'D'$ را بدست آورد . این عمل مجاز است چون وقتی که نقشه را در سطحی فرض کنیم که لبه های چپ و راست و لبه های بالا و پایین آن بهم متصلند ، این چهار مربع همجوارند . دوتا ۱ در سمت چپ از ردیف اول با دو تا ۱ از سمت آخر ترکیب شده و عبارت $B'C'$ را بدست آورد . ۱ های باقیمانده را می توان به صورت دو مربع ترکیب کرد و عبارت $A'CD'$ را بدست آورد . تابع ساده شده عبارتست از :

$$F = B'D' + B'C' + A'CD'$$

انتخاب های نخستین

هنگام انتخاب مربع های مجاور در نقشه ما باید مطمئن باشیم که تمام مینترم های تابع ضمن ترکیب پوشش داده شده اند . همچنین لازم است که تعداد مینترم ها درعبارت حداقل شده و از جملات مانده ای که مینترم هایشن قبلاً بوسیله سایر جملات پوشش یافته نیز پرهیز گردد .گاهی اوقات هم دو یا سه عبارت وجود دارند که بر عمل ساده سازی صحه می گذرند . روش ترکیب مربع ها درنقشه ممکن است سیستماتیک تر شود ، بشرطی که ما مفهوم جملاتی مانند نخستین انتخاب اصلی

را بدانیم . یک نخستین انتخاب جمله حاصلضربی است که از ترکیب حداکثر ممکن از مربع ها همجوار در نقشه بدست آید . اگر مینترمی در یک مربع بوسیله فقط یک نخستین انتخاب پوشش یابد ، آن نخستین انتخاب را اصلی گوییم .



نخستین انتخاب یک تابع از یک نقشه با ترکیب حداکثر تعداد ممکن مربع ها بدست می آید . این بدان معنی است که یک ۱ تنها در یک نقشه اگر با هیچ ۱ دیگری مجاور نیست یک نخستین انتخاب را بدست میدهد . دو ۱ مجاور هم یک نخستین انتخاب را تشکیل می دهند بشرطی که در یک گروه هشتایی مجاور نباشند والی آخر . نخستین انتخابهای اصلی با نظاره بر هر مربع که با ۱ علامت زده شده و چک نمودن تعداد نخستین انتخابهایی که آنرا می پوشاند یافت می شود . یک نخستین انتخاب ، اصلی است اگر که تنها نخستین انتخابی باشد که مینترم را پوشش می دهد .

تابع بول چهار متغیره زیرا را ملاحظه کنید .

$$F(A,B,C,D)=\sum(0,2,3,5,7,8,9,10,11,13,15)$$

مینترم های تابع با ۱ ها در نقشه شکل (۱۱-۳) علامت زده شده اند . قسمت (الف) از شکل ، دو نخستین انتخاب اصلی را نشان میدهد . چون m_0 تنها در یک گروه مربع

چهار تایی می تواند باشد پس یک جمله اصلی وجود دارد . این چهار مربع $B'D'$ را تعریف می نمایند . بطور مشابه تنها برای ترکیب m_5 با چهار مربع مجاورش تنها یک راه وجود دارد و این دومین جمله BD را خواهد داد . دو نخستین انتخاب اصلی هشت مینترم را پوشش می دهند . سه مینترم باقیمانده m_3 ، m_9 و m_{11} در زیر بررسی میشوند .

شکل (۱۱-۳ ب) تمام راههای ممکنی که سه مینترم می تواند با نخستین انتخاب ها پوشش یابد را نشان می دهد . مینترم m_3 می تواند بوسیله نخستین انتخاب CD یا $B'C'$ پوشش یابد . مینترم m_9 بوسیله AD یا AD' پوشش می یابد. مینترم m_{11} با هر یک از چهار نخستین انتخاب قابل پوشش است .

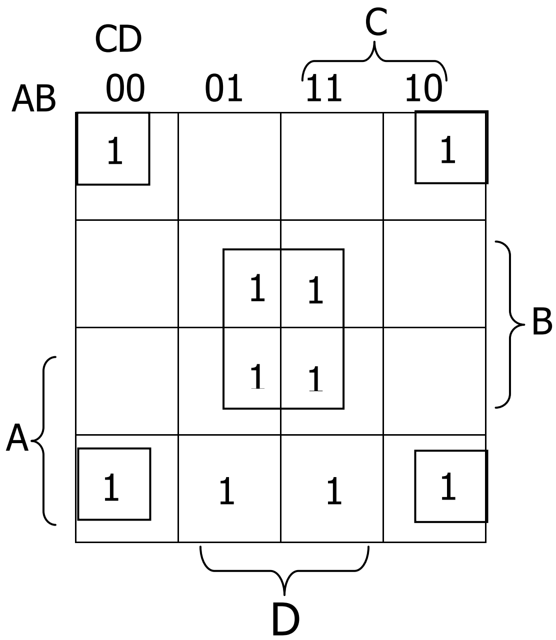
عبارت ساده شده از جمع منطقی دو نخستین انتخاب اصلی و هر دو نخستین انتخابی که مینترم های m_9،m_3 و m_{11} را پوشش دهد ، حاصل می گردد . چهار روش برای بیان تابع با چهار جمله ضرب که هر یک دارای دو متغیرند وجود دارد :

$$\begin{aligned} F &= BD + B'D' + CD + AD \\ &= BD + B'D' + CD + AB' \\ &= BD + B'D' + B'C + AD \\ &= BD + B'D' + B'C + AB' \end{aligned}$$

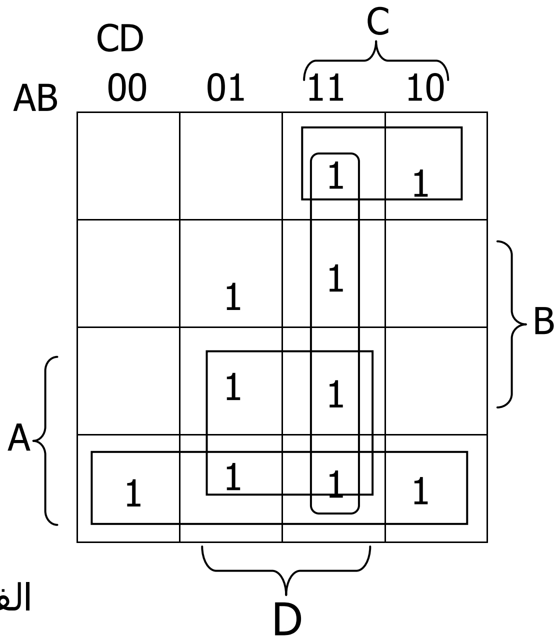
مثال فوق نشان داد که شناخت نخستین انتخاب ها در نقشه به یافتن صور مختلف تابع کمک موثری مینمایند .

روش یافتن عبارت ساده شده از نقشه نیاز دارد که ابتدا تمام نخستین انتخاب های اصلی را معین کنیم . عبارت ساده شده از جمع منطقی تمام نخستین انتخاب های اصلی را بعلاوه سایر نخستین می آید .در نتیجه ممکن است بیش از یک راه برای

ترکیبات مربعات وجود داشته باشد که هر ترکیب خود عبارت ساده شده ای را تولید نماید .



الف) نخستین انتخاب هاي اصلي $B'D'$ و BC



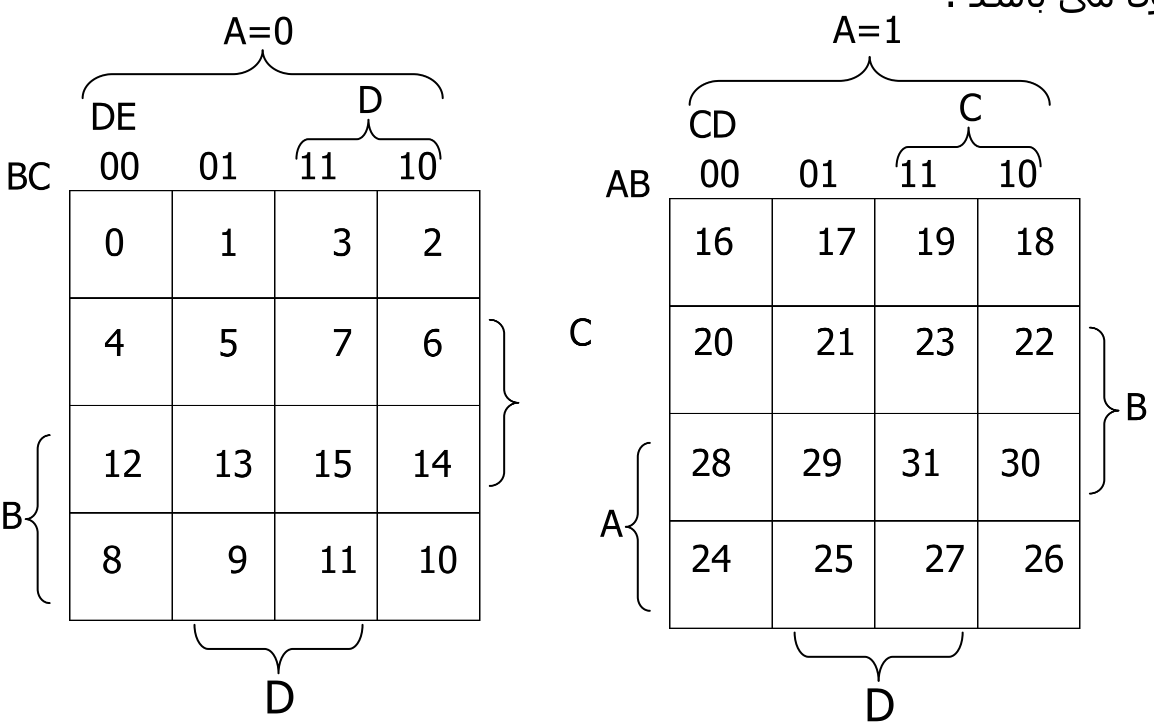
ب) نخستن انتخاب هاي $B'D'$ CD ، AD و AB'

۳-۴ نقشه پنج متغیره

کار با نقشه هایی که بیش از چهار متغیر دارند ساده نیست . یک نقشه پنج متغیره ۳۲ مربع و یک نقشه شش متغیره ۶۴ مربع دارد . وقتی که تعداد متغیرها زیاد شود تعداد مربعه ها هم بطور بی رویه ای افزایش می یابد و یافتن مربعات همجوار بیشتر به شکل هندسی نقشه وابسته می گردد .

نقشه پنج تغیره در شکل (۱۲-۳) نشان داده شده است . این شکل شامل دو نقشه چهار متغیره با متغیرهای E,D,C,B,A می باشد . متغیر A دو نقشه را ، همانطور که در بالای جداول دیده می شود ، از یکدیگر تفکیک می نماید . نقشه چهار متغیره سمت چپ شانزده مربعی را که در آنها A=0 است نشان می دهد ، و نقشه چهار متغیره دیگر مربع هایی که در آنها A=1 است را در بر دارد . مینترم های ۰ تا ۱۵ متعلق به A=0 و مینترم ۱۶ الی ۳۱ به A=1 وابسته اند . هر نقشه جچهار متغیره وقتی که

جداگانه در نظر گرفته ، همجواری تعریف شده قبلی خود را حفظ می کند . بعلاوه هر مبع از نقشه A=0 با مربع متناظرش در A=1 همجوار است . مثلاً مینترم ۴ با مینترم ۲۰ مجاور است و مینتمر ۱۵ نیز با ۳۱ همجوار می باشد . بهترین راه تشخیص این قانون جدید برای مربع های همجوار اینست که تصور کنیم که دو نیم نقشه با قرار گرفتن روی هم تبدیا به یکی گردیده اند . هر دو مربعی که روی دیگری بیفتد با آن مجاور است . با دنبال کردن روشی که برای نقشه پنج متغیره بکار رفت ، می توان نقشه شش متغیره ای با ۴ نقشه متغیره ساخت تا ۶۴ مربع مورد نیاز بدست آید . نقشه هایی با شش یا تعداد بیشتری متغیر نیازبه تعداد بی شماری مربع داشته و غیر کاربردی هستند . روش دیگر بکار بردن بنرامه های کامپیوتر خاص جهت سازی توابع بول می باشد .



شکل (۱۲-۳) نقشه شش متغیره

با بررسی و در نظر گرفتن تعریف جدید همجواری مربع های ، میتوان نشان داد که 2^K مربع همجواری با ازای $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ در یک نقشه n متغیره ، ناحیه ای را مشخص می کنند که نمایش دهنده یک جمله n-k متغیره است . برای تکمیل مفهوم

عبارت بالا ، می بایست n از k بزرگتر باشد . وقتی n=k باشد تمام سطوح نقشه با هم ترکیب می شوند و حاصل ترکیب ، تابع ثابت ۱ است .

جدول (۱-۳) ارتباط بین تعداد مربعهای همجوار و تعداد متغیرها در یک جمله را نشان می دهد . مثلاً هست مربع همجوار در نقشه پنج متغیره مساحتی را ترکیب می کنند تا یک جمله با و متغیر بدست آید .

2	2^k	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7
0	1	2	3	4	5	6	7
1	2	1	2	3	4	5	6
2	4	0	1	2	3	4	5
3	8		0	1	2	3	4
4	16			0	1	2	3
5	32				0	1	2
6	64					0	1

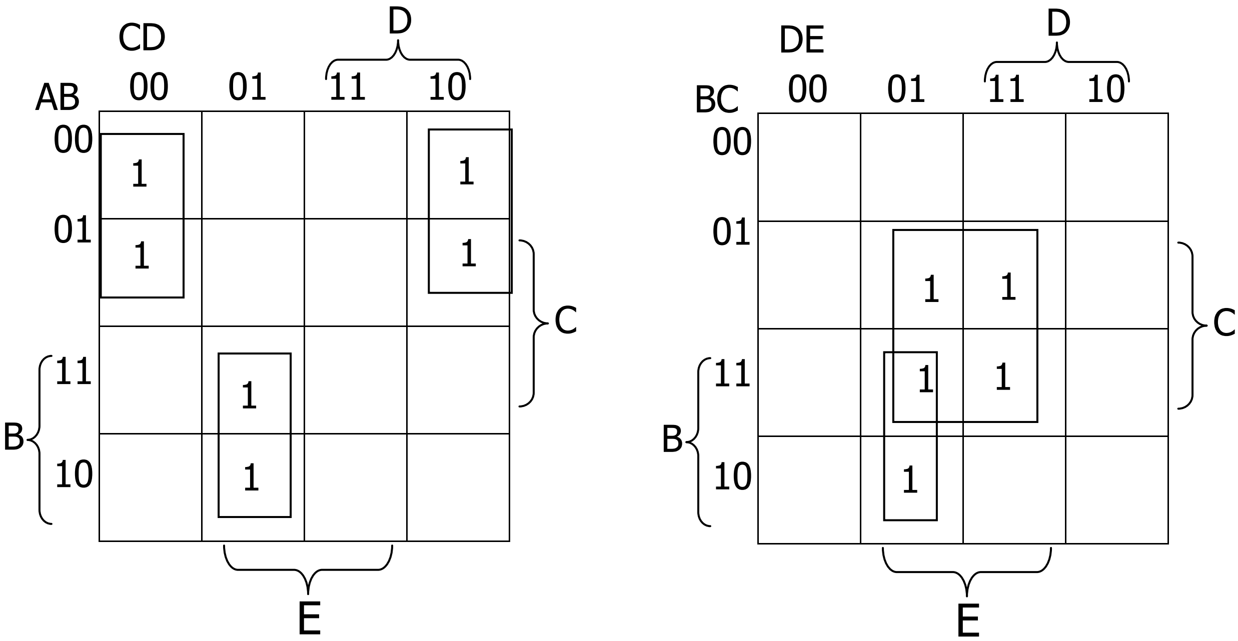
مثال ۷-۳: تابع بول زیر را ساده کنید :

F(A,B,C,D,E) = (0,2,4,6,9,13,21,23,25,29,31)

نقشه پنج متغیره برای این تابع در شکل (۱۳-۳) دیده می شود . به بخشی از نقشه که در آن A=0 است شش مینترم تابع ، از ۰ تا ۱۵ ، تعلق دارد . پنج مینترم دیگر به بخش A=1 متعلق است . چهار مربع مجاور در نقشه A=0 با هر ترکیب شده تا جمله سه متغیره $A'B'E'$ را بدهد . دقت کنید که لازم است A' را در جمله منظور کنیم زیرا تمام مربع های متعلق به A=0 می باشند . دو مربع در ستون ۰۱ و

دو سطر آخر در هر دو قسمت نقشه مشترکند . بنابراین چهار مربع مجار را تشکیل داده و جمله سه متغیره $BD'E$ را می سازند . متغیر A در اینجا آورده نشده زیرا مربع های مجاور متعلق به هر دو A=0 و A=1 می باشند . جمله ACE از چهارمربع همجواری حاصل شده که در نقشه A=1 قرار دارند . تابع ساده شده جمع منطقی سه جمله است :

$$F = A'B'E' + BD'E + ACE$$



شکل (۳-۱۳) نقشه براي مثال ۳-۷ $F = A'B'E' + BD'E + ACE$

۳-۵ ساده سازی با استفاده از ضرب حاصلجمع ها

در تمام مثالهای قبل از توابع بول حاصل از نقشه ها به فرم جمع حاصلضرب بیان شده بودند . با یک تغیر کوچک می توان فرم ضرب حاصلجمع ها را نیز برای آنها بدست آورد .

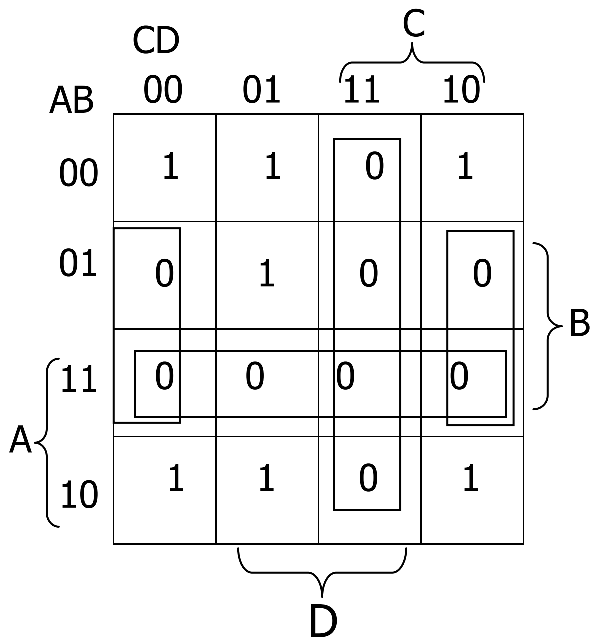
یافتن روالی برای بدست آوردن یک تابع می نیمم بر حسب ضرب حاصلجمع ها نیازمند دانستن خواص اساسی توابع بول است . وجود ۱ ها در مربعهای نقشه ، بیانگر مینترم های تابع است . مینترم هایی که در تابع نیستند بیانگر مکمل تابع می باشند . با توجه به این مطلب مشاهده می کنیم که مکمل یک تابع بوسیله مربعهایی که فاید ۱ هستند نشان داده می شود . اگردر مربعهای خالی ۰ بگذاریم و آنها را با روش مربعهای همجوار ترکیب کنیم عبارت ساده شده ای از مکمل تابع ، یعنی F' تابع F را به ما بر می گرداند . بعلت عمومیت تئوری دمورگان تابع حاصل خودبخود بصورت ضرب حاصلجمع ها بدست می آید . بهترین روش برای تشریح این مطلب ارائه یک مثال است .

مثال ۸-۳: تابع بول زیر را ساده کنید :

الف) بر حسب جمع حاصلضرب ها   ب) بر حسب ضرب حاصلجمع ها

$$F(A,B,C,D)=\sum(0,1,2,5,8,9,10)$$

۱ ها موجوددر نقشه شکل (۱۴-۳) نشان دهنده تمام مینترم های تابع است . مربعهای دارای ۰ بیانگر مینترم هایی هستند که در تابع F نبستند ، بنابراین بر مکمل F دلالت می کنند . از ترکیب مربعهای ۱ ، تابع ساده شده به فرم جمع حاصلضرب ها بدست می آید.



شکل (۱۴-۳) نقشه مثال ۸-۳

الف) $$F = B'D' + B'C' + A'CD'$$

اگر مربعهای دارای ۰ همانطوری که در شکل نشان داده شده است ترکیب شوند تابع شاده شده زیر را خواهیم داشت :

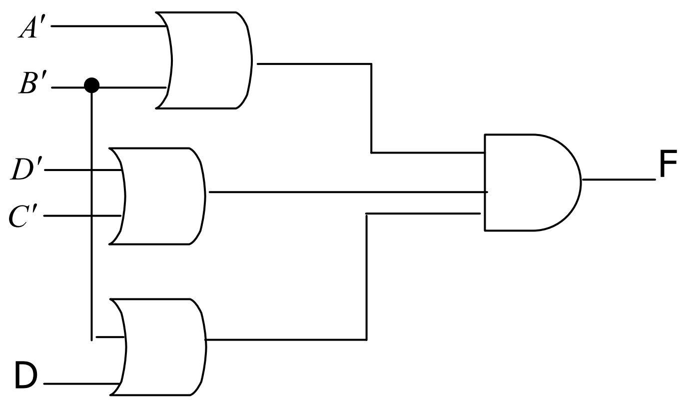
$$F' = AB + CD + BD'$$

با بکار بردن قضیه مورگان (با استفاده از دوگانگی و مکمل کردن هر متغیر طبق آنچه در بخش ۴-۲ شرح داده شده) تابع ساده شده را به فرم ضرب حاصلجمع تها بدست می آوریم .

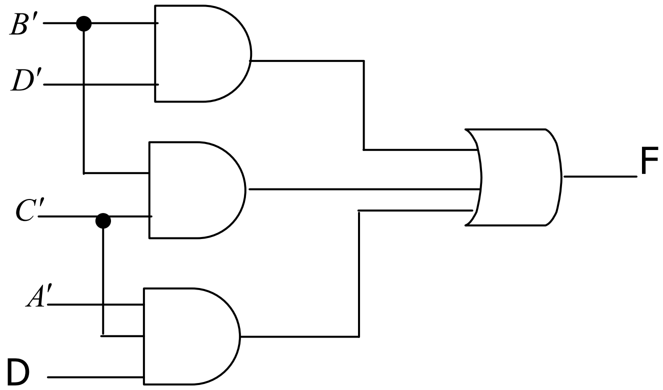
ب) $$F = (A' + B')(C' + D')(B' + D)$$

پیاده سازی عبارت ساده شده حاصل از مثال ۸-۳ در شکل (۱۵-۳) نشان داده شده است . عبارت جمع حاصلضرب ها در شکل (۱۵-۳) ، با مجموعه ای از گیت های AND که هر گیت برای یک جمله AND می باشد پیاده سازی شده است و خروجی گیت های AND نیز به رورودی گیت OR متصل گردیده است . همان عبارت بصورت ضرب حاصلجمع ها در شکل (ب) با تعدادی گیت OR که هر کدام برای یک جمله OR می باشد پیاده سازی شده و خروجی آنها به یک AND منتهی گردیده است . در هر حالت فرض شده که مکمل متغیرهای ورودی مستقیماً در دسترس است ، بنابراین به معکوس کننده ها نیازی نیست . الگوهای ایجاد شده در شکل (۱۵-۳) یک سری روشهای کلی هستند ک بوسیله آنها هر تابع بول استاندارد ، قابل پیاده سازی است . در جمع حاصلضرب ها ، گیت های AND به یک گیت OR متصل شده و در ضرب حاصلجمع ها گیت های OR به یک گیت AND وصل می شوند . هر یک از دو

پیکره بندی فوق دارای دو طبقه از گیت ها می باشند . به همین دلیل پیاده سازی یک تابع به فرم استاندارد ، پیاده سازی دو طبقه ای نامیده می شود .



(ب) $F = (A' + B')(C' + D')'(B' + D)$



(الف) $F = B'D' + B'C' + A'C'D'$

مثال ۸-۳ روالی برای مجاسبه فرم ساده شده یک تابع بر جسب ضرب حاصلجمع ها ، وقتی که تابع ابتدا برحسب جمع مینترم ها بیان شده باشد را نشان داد . این روال هنگامي که تابع در آغاز بر حسب ضرب ماکسترم ها بیان شود نیز معتبر است . براي مثال به جدول درستي (۲-۳) که تابع F تعریف مي کند توجه کنید در جمع مینترم ها این تابع چنین بیان مي شود :

$$F(x, y, z) = \sum(1,3,4,6)$$

و در ضرب ماکسترم ها بصورت زیر است :

$$F(x, y, z) = \prod(0,2,5,7)$$

به عبارت دیگر ۱ های تابع نشان دهنده جملات مینترم و ۰ های آن بیانگر جملات ماکسترم هستند . نقشه این تابع در شکل (۱۶-۳) رسم شده است . برای ساده کردن این تابع ابتدا می توان در مربع مربوط به هر جمله مینترم که تابع به ازای آن مقدار ۱ دارد عدد ۱ گذاشت و مربعهای باقیمانده را با ۰ پر می کرد . از طریق دیگر اگر

تابع به فرم ضرب ماکسترم ها داه شده باشد در ابتدا می توان در مربعهایی که تابع مشخص می کند ۰ گذاشت و مربعهای باقیمانده را با ۱ پر کرد . هنگامی که ۱ ها و ۰ ها در جدول گذاشته شدند ، تابع می تواند باقیمانده را با ۱ پر کرد . هنگامی که ۱ ها و ۰ ها در جدول گذاشته شدند ، تابع می تواند به یکی از فرمهای استاندارد ساده شود . برای جمع حاصلضرب ها ۱ ها را با ترکیب می کنیم و خواهیم داشت :

$$F = x'z + xz'$$

جدول (۲-۳) جدول درستی

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

x \ yz	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	0	0	1

شکل (۱۶-۳) نقشه تابع جدول (۲-۳)

براي ضرب حاصلجمع ها ، ۰ ها را با هم ترکیب می کنیم تا مکمل تابع ساده شده بصورت زیر بدست آید :

$$F' = xz + x'z'$$

این رابطه نشان می دهد که تابع XOR ، مکمل تابع هم ارزي مي باشد . (بخش ۶-۲) با مکمل کردن F' در حقیقت تابع ساده شده به فرم ضرب حاصلجمع ها خواهیم داشت :

$$F=(x'+z')(x+z)$$

براي وارد كردن يك تابع در يك نقشه كه بر حسب ضرب حاصلجمع ها بيان شده است مي بايست مكمل تابع را بدست آوردد و با استفاده از آن ، مربعهاي مربوطه را با ۰ پر كرد . برای مثال تابع

$$F=(A'+B'+C')(B+D)$$

و سپس مربعهایی که عبارات می نیمم َf رانشان مي دهند با ۰ مربعهاي باقيمانده را با ۱ پر مي كنيم .

۳-۶ پیاده سازي بوسيله كيت هاي NAND و NOR

مدارهاي ديجيتال اغلب بجاي اينكه با كيت هاي AND و OR ساخته شوند با كيت هاي NAND و NOR ساخته مي شوند .ساختن گیت های NAND و NOR بااجزای الكترونكی ساده تر بوده و بعنوان گیت های پایه در تمام خانواده های آی سی های منطقی بکار میروند . به دلیل مزیت گیتهای NAND NAND و NOR در طراحی مدارهای دیجیتال ، اصول و قواعدی برای تبدیل توابع بول بیان شده بر حسب AND و OR و NOT به دیاگرام منطقی NAND و NOR معادل بوجود آمده است . در این بخش ،روال پیاده سازی دو طبقه نشان داده شده است .

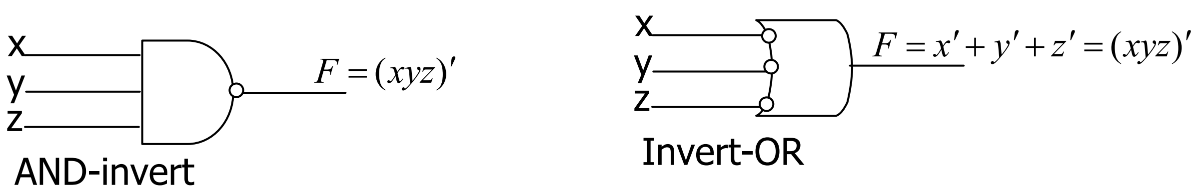
برای سادگی تبدیل به منطق NAND و NOR بهتر است دو سمبل دیگر را برای این گیت ها تعریف کنیم .دو سمبل برای گیت NAND در شکل (۱۷-۳) نشان داده شده

است . سمبل AND-INVERT قبلاً تعریف شده که شامل سمبل AND و بدنبال آن یک دایره کوچک است . بجای آن می توان یک گیت NAND را با یک سمبل OR که وایر کوچکی در تمام ورودی های آن کشیده شده است نشان داد . سمبل AND-INVERT برا گیت NAND با توجه به قضیه دمورگان ودر نظر گرفتن این قرار داد که دوایر کوچک مکمل کردن می باشند بدست می آید .

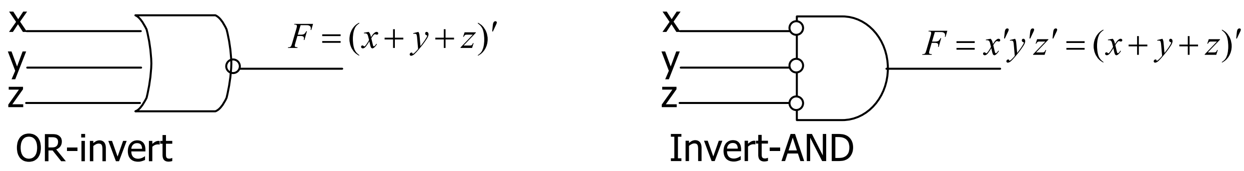
بطور مشابه ، دو سمبل نیز برای گیت NOR یک سمیل قراردادی است وAND-INVERT نیز شکل مناسب دیگری استه قضیه دمورگان و قرار داد دایره های کوچک به معنی مکمل کردن را مورد استفاده قرار می دهد .

یک گیت nand یا nor با یک ورودی مثل معکوس کننده عمل می کند ، نتیجتاً یک گیت معکوس کننده رامی توان به یکی از سه حالت مختلف که در شکل (۱۷-۳ پ) نشان داده شده است نمایش داد .دایره های کوچک درهر سمبل معکوس کننده را می توان بدون تغییر منطق گیت به پایه ورودی آن انتقال داد .

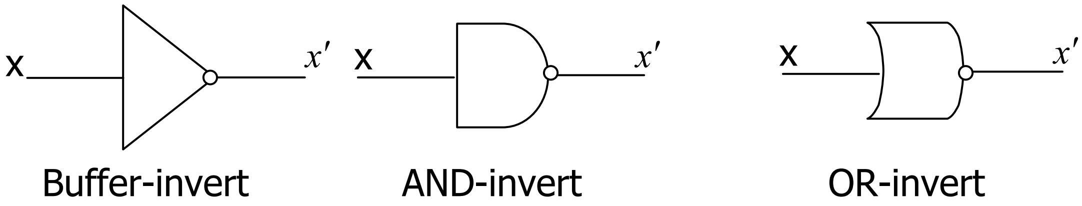
باید خاطر نشان کرد که سمبلهای معادل دیگر برای گیت های NAND و NOR را می توان با جایگزینی مثلث های کوچک بجای دایره های در همه پایانه های ورودی کشید . یک مثلث کوچک نشانه یک منطق منفی است ، بنابراین وجود مثلهای کوچک روی پیایه های ورودی در سمبل گرافیگی یک گیت ، دلالت برا منفی بودن منطقی ورودی های آن دارد . اما به خروی یک گیت (که دارای مثلث نیست) یک منطق مثبت منسوب شده است .



(الف) دو سمبل گرافیکی برای گیت NAND



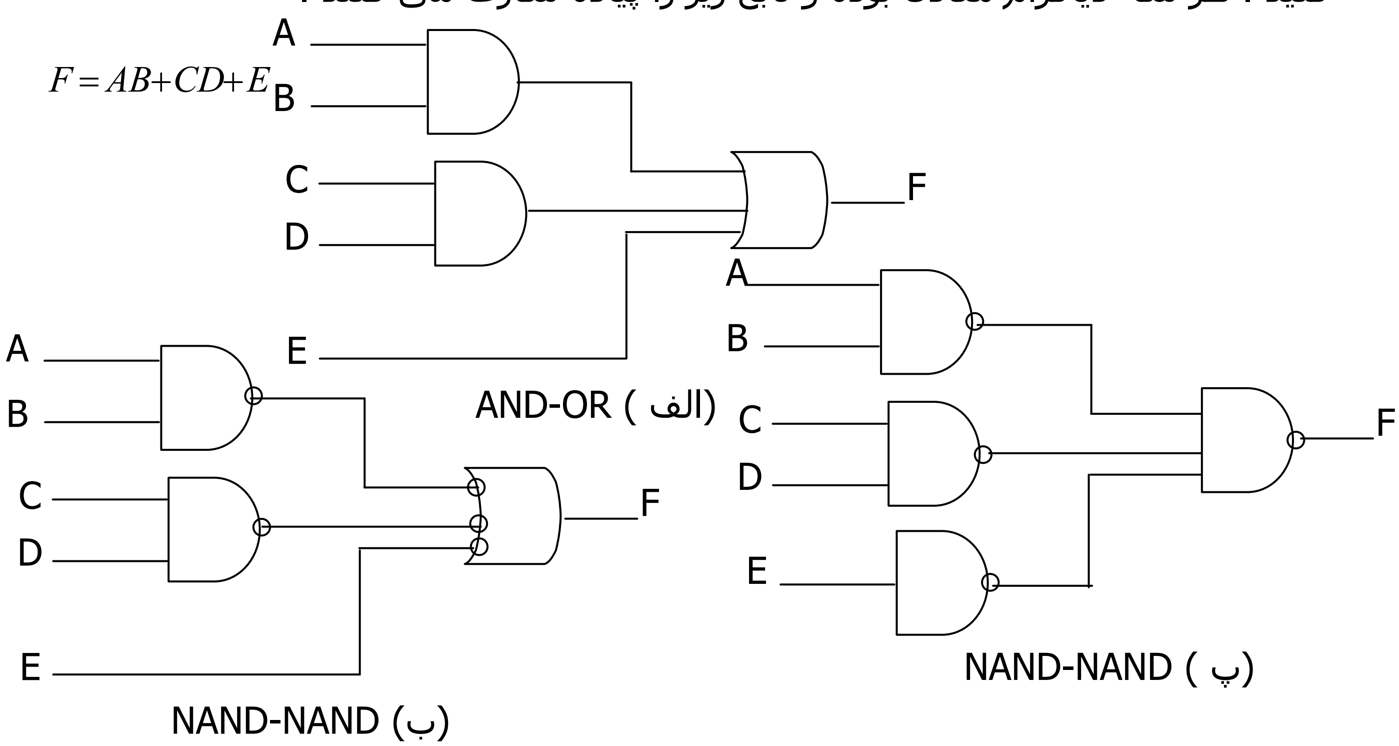
(ب) دو سمبل گرافیکی برای گیت NOR



شکل (۳-۱۷) سه سمبل گرافیکی برای معکوس کننده

پیاده سازی با گیت NAND

پیاده سازی یک تابع بول باگیت های NAND مستلزم این است که تابه به فرم جمع حاصلضرب ها ساده شده باشد برای درک ارتباط بین عبارت جمع حاصلضرب ها و معادل پیاده شده NAND آن به دیاگرام منطقی کشیده شده در شکل (۳-۱۸) توجه کنید . هر سه دیاگرام معادل بوده و تابع زیر را پیاده سازی می کنند .



شکل (۳-۱۸) سه راه مختلف پیاده سازی F=AB+CD+E

تابع در شکل (١٨-٣ الف) به فرم جمع حاصلضرب ها با استفاده از گیت هـای AND و OR پیاده شده است . در شکل (ب) گیت های AND با گیـت هـای NAND و گیـت OR نیز بوسیله یک گیت NAND با سمبل AND-INVERT مـشخص گردیـده جـایگزین شــده است . متغیـر E مکمـل شــده و بـه طبقـه دوم یعنـی گیـت INVERT-OR اعمـال شــده است . بخاطر داشته باشیدکه دایره کوچـک دال بـر مکمـل سـازی اسـت . بنـابراین دو دایـره کوچـک در یـک مـسیر نـشان دهنـده دوبـار مکمـل سـازی بـوده وم یتوانـد حـذف شوند . مکمل E از میان یک دایره کوچک کـه متغیـر را مجـدداً مکمـل مـی نمایـد عبـور کرده و تا مقدار طبیعـی E را تولیـد مـی کنـد . حـذف دایـره هـای کوچـک درگیـت هـای شکل (١٨-٣ب) ف مدار (الف) راتولید می کند . بنابرای هر دو دیاگرام یک تـابع را پیـاده سازی کرده و معادل هستند .

در شکل (١٨-٣ پ) گیـت NAND طبقـه خروجـی دوبـاره بـا سـمبل قـراردادی کـشیده شده است . گیت NAND بـا یـک ورودی ، متغیـر E را مکمـل مـی کنـد . ایـن معکـوس کننـده را مـی تـوان حـذف کـرد و مـستقیماً بـرای گیـت NAND سـطح دوم ، E را بکـار برد .دیاگرام شکل (پ) معادل با (ب) است است که این نیز به نوبه خودمعادل (الـف) می باشد . به شباهت بیت دیاگرام های (الف) و (پ) توجـه کنیـد گیـت هـای AND و OR به گیت های NAND تغیر یافته اند ، اما یک گیـت NAND در ورودی E اضـافه شــده است به هر حال در رسم دیاگرام منطقی متشکل از NAND ، هر دو مـدار نـشان داده شده در (ب) یا (پ) قابل قبول هستند . با این وجد دیاگرام (ب) دارای ارتباط مستقیم بیشتری با عبارت بول پیاده شده است .

صحت پیاده سازی بوسیله گیت های NAND در شـکل (۱۸-۳ پ) مـی توانـد بـصورت جبری بازنگری شود . تابع NAND پیاده شده می تواننـد بـسادگی بااسـتفاده از قـانون دمورگان به فرم جمع حاصلضرب تبدیل گردد .

$$F = [(AB)'..(CD)'.E']' = AB + CD + E$$

از تبدیل گام به گام در شکل (۱۸-۳) نتیجه می گیریم که یک تابع بول می تواند بـه دو طبقه از گیتهاNAND پیاده سازی شود . قاعده بدست آوردن دیاگرام منطقی NAND از یک تابع بول شده بشرح زیر است :

۱- تابع را ساده کرده و آن را به فرم جمع حاصلضرب ها بنویسید .

۲- برای هر جمله ضرب موجود درتابع که حداقل دارای دو متغیر است یک گیـت NAND بکشید . ورودی های هر گیت NAND متغیرهای آن جمله هستند . این مجموعه گیـت های طبقه اول را تشکیل می دهند .

۳- در طبقه دوم ، یک گیت NAND بـا ورودیهـایی کـه ازخروجـی هـای طببقـه اول مـی آیند .بکشد . (از سمبل گرافییکی AND-invert یا invert –OR استفاده کنید) .

٤- یک جملـه تـک متغیـری در طبقـه او نیازمنـد یـک معکـوس کننـده اسـت . همچنـین میتوان مکمل آن را بعنوان ورودی برای گیت NAND طبقه دوم بکار برذ .

قبل از بکار گیری این روش در یک مثال خاص باید خـاطر نـشان کـرد کـه راه دومـی نیـز برای پیاده سازی توابع بول با گیت های NAND موجود است . بخاطر بیاورید که اگـر در یک نقشه ۰ ها را ترکیب کنـیم عبـارت سـاده شـده مکمـل آنهـا تـابع را بـه فـرم جمـع حاصلضرب ها بدست می آوریم . مکمل تابع رامی توان با دو طبقه ازگیت هـای NAND و با استفاده از قواعدی که در بالا بیانشده پیاده کرد . اگر خروجی به فرم طبیعی مورد نظر باشد لزوم است تا یک گیت NAND با یک ورودی یا گیت معکوس کننده برای تولید

فرم واقعی تابع خروجی منظور شود . گاهی ممکن است طراح بخواهد مکمل یکتابع را تولید کند که دراین صورت متددوم ارجح می باشد .

مثال ۹-۳: تابع زیر را با گیت های NAND پیاده کنید :

$$F(x,y,z)=\sum(0,6)$$

اولین قدم ساده کردن تابع به فرم جمه حاصلضرب ها است که طبق نقشه نشان داده شده در شکل (۱۹-۳ الف) انجام می شود .در نقطه فقط دو ۱ موجود است که نمی توانند با هم ترکیب شوند . بنابراین تابع ساده شده به فرم جمع حاصلضرب ها عبارتست از :

$$F=x'y'z'+xyz'$$

پیاده سازی با دو طبق گیت NAND در شکل (۱۹-۳ ب) نشان داده شده است . در قدم بعدی سعی می کنیم مکمل تابعی را به فرم جمع حاصلضرب ها ساده کنیم که با ترکیب ۰ ها در نقشه میسر است .

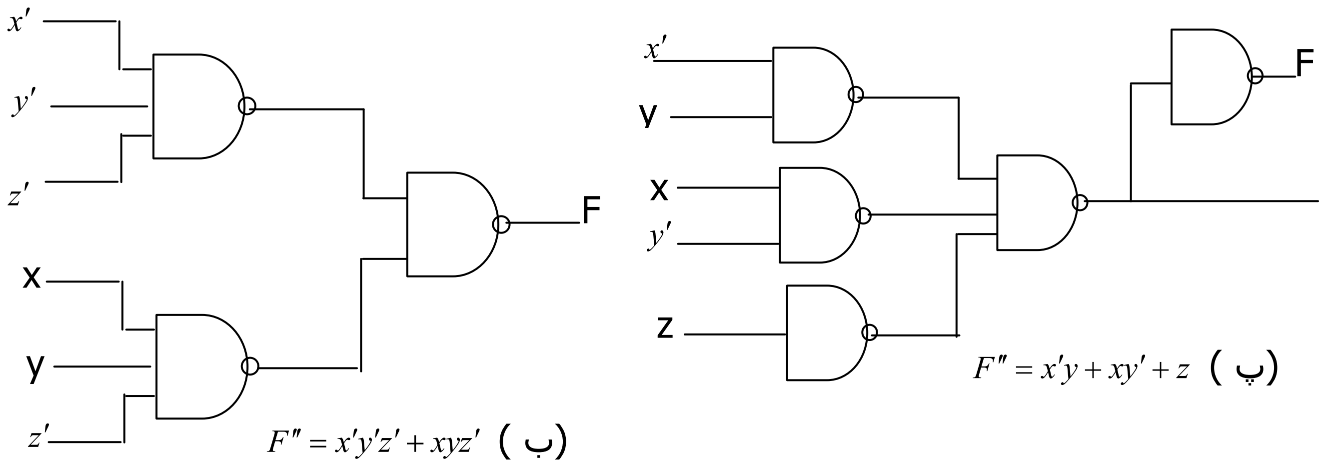
$$F'=x'y+xy'+z$$

در شکل (۱۹-۳ پ) دو طبقه گیت NAND برای تولید F' نشان داده شده است .اگر در خروجی به F نیاز باشد یک گیت NAND با یک ورودی نیز اضافه شود تا تابع را معکوس کند که در این صورت پیاده سازی در سه طبقه خواهد بود . اگر متغیرها فقط به یک فرم قابل دسترسی باشند می بایست در ورودی معکوس کننده هایی منظور کنیم که باعث اضافه شدن طبقه دیگری به مدار خواهند شد . گیت NAND با یک ورودی مربوط به متغیر z می تواند حذف شود ، بشرط آنکه آن متغیر به Z' تبدیل گردد .

x \ yz	00	01	11	10
0	1	0	0	0
1	0	0	0	1

$$F = x'y'z' + xyz'$$
$$F' = x'y + xy' + z$$

(الف) ساده سازی نقشه در جمع حاصلضرب



شکل (۱۹-۳) پیاده سازی تابع مثال ۹-۳ با استفاده از گیت های NAND

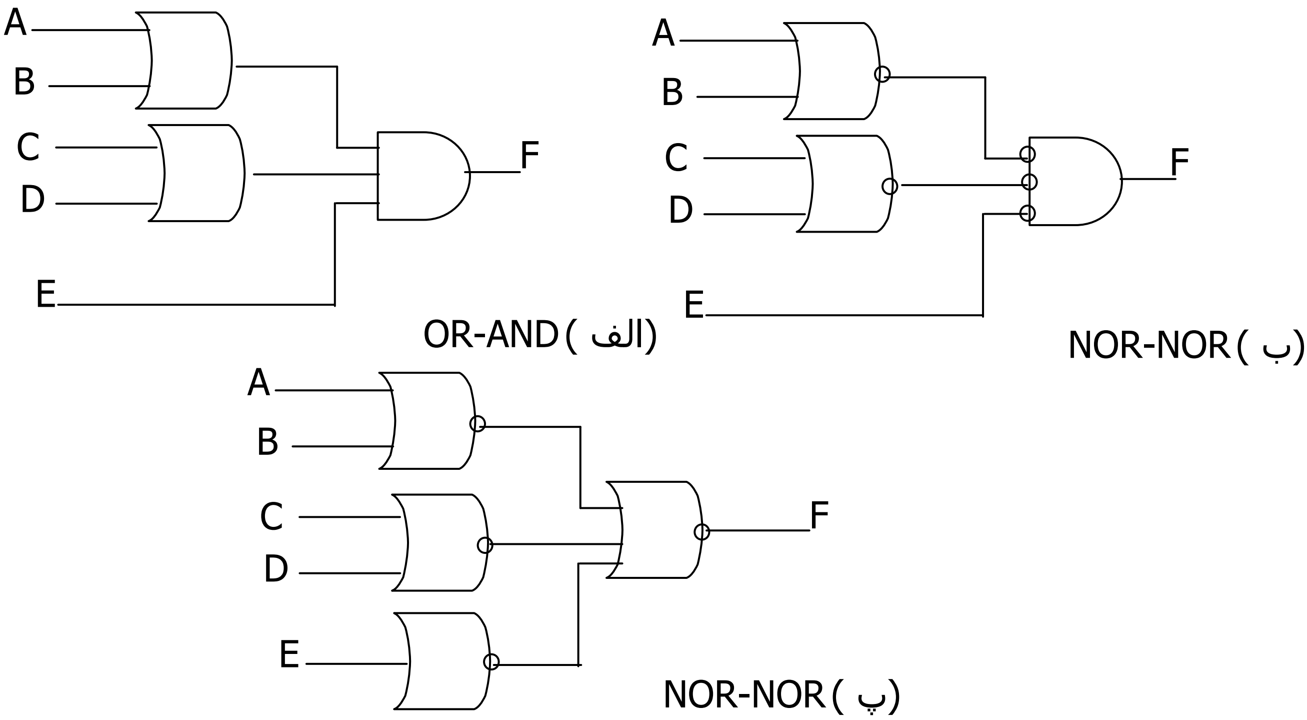
پیاده سازی بوسیله گیت NOR

تابع NOR دوگان تابع NAND است . به همین دلیل همه روالها و قواعد منطق NAND دوگان روالها وقواعد منطق NAND می باشد .

برای پیاده سازی یک تابع بول با گیت NOR باید به فرم ضرب حاصلجمع ها ساده شود . یک عبارت به صورت ضرب حاصلجمع ها ، مجموعه ای از گیت های OR برای جملات جمع و بدنبال آن یک AND برای تولید ضرب است . تبدیل گام به گام از OR-AND به دیاگرام NOR-NOR در شکل (۲۰-۳) نشان داده شده است . این مراحل شبیه مراحل تبدیل به NAND است با این تفاوت که در اینجا از عبارت ضرب حاصلجمع ها استفاده می کنیم .

$F=(A+B)(C+D)E$

قانون بدست آوردن دیاگرام منطقی NOR از یک تابع بول می تواند از تبدیل مشتق شود که شبیه به قانون سه مرحله ای NAND است ، با این تفاوت که عبارت ساده شده می بایست به فرم ضرب حاصلجمع ها باشد و جملات طبقه اول گیت ها NOR جملات جمع باشند . یک جمله تک متغیری به یک NOR با یک ورودی یا یگ گیت معکوس کننده نیاز دارد و یا اینکه می توان آن را مکمل کرده و مستقیماً در طبقه دوم گیت NOR بکار برد.



شکل (۳-۲۰) سه روش پیاده سازی تابع $F=(A+B)(C+D)E$

روش دوم پیاده سازی یک تابع بوسیله گیت های NOR ، استفاده ازمکمل تابع بر حسب ضرب حاصلجمع ها است . این روش پیاده سازی دو طبقه را برای F' و پیاده سازی سه طبقه را در صورت نیاز برای F نتیجه می دهد .

برای بدست آوردن ضرب حاصلجمع های ساده شده از یک جدول ، لازم است تا ۰ ها را در جدول ترکیب کرده و سپس تابع حاصل را مکمل کنیم به منظور بدست آوردن

عبارت ساده شده ضرب حاصلجمع ها برای مکمل تابع ، می بایست ۱ ها را در جدول ترکیب کرده و سپس تابع را مکمل نماییم . مثال زیر روال پیاده سازی بوسیله NOR را نشان می دهد .

مثال ۱۰-۳: تابع مثال ۹-۳ را با گیت های NOR پیاده کنید .

نقشه این تابع در شکل (۱۹-۳ الف) کشیده شده است . در این نقشه ابتدا ۰ ها را با هم ترکیب می کنیم تا عبارت زیر بدست آید :

$$F' = x'y + xy' + z$$

این عبارت ، مکمل تابع بر حسب جمع حاصلضرب ها است . سپس F' را مکمل می نمایم تا تابعی که برحسب ضرب حاصلجمع ها است و برای پیاده سازی بوسیله NOR لازم است بدست آورید .

پیاده سازی دو طبقه با گیت های NOR در شکل (۲۱-۳ الف) نشان داده شده است . جمله ای که فقط دارای حرف z' است نیازمند به گیت NOR با یک ورودی و یا یک گیت معکوس کننده می باشد . این گیت می تواند حذف شده و ورودی z مستقیماً به ورودی گیت NOR طبقه دوم متصل گردد .

با استفاده از مکمل تابع بر حسب ضرب حاصلجمع ها پیاده سازی به روش دیگری نیز مقدور است . در این حالت ابتدا ۱ ها را در جدول ترکیب و عبارت زیر را بدست می آوریم .

$$F = x'y'z' + xyz'$$

این عبارت فرم ساده تابع بر حسب جمع حاصلضرب ها می باشد. سپس تابعی را مکمل می کنیم تا مکمل آن را بر حسب ضرب حاصلجمع ها به صورتی بدست آوریم که برای پیاده سازی توسط NOR لازم است :

$$F=(x+y+z)(x'+y'+z)$$

در شکل (۲۱-۳ب) پیاده سازی دو طبقه برای F' نشان داده شده است . اگر خروجی F مورد نظر باشد ، میتوان با استفاده از یک معکوس کننده آن رادر طبقه سوم تولید کرد .

در جدول (۳-۳) روشهای پیاده سازی NOR یا NAND خلاصه شده است . چیزی که نباید فراموش شود این است که همیشه هدف از ساده کردت یک تابع کاهش تعداد گیت های آن در زمان پیاده سازی است . فرمهای استاندارد از روشهای ساده سازی مستقیماً کاربرد دارند و هنگامی که هدف ، بکارگیری NAND یا NOR باشد بسیار مفید هستند.

جدول (۳-۳) قوانین پیاده سازی NOR و NAND

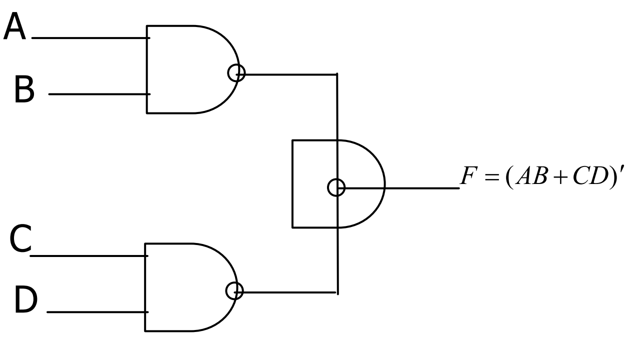
حالت	تابع جهت ساده سازی	فرم استاندارد جهت استفاده	نحوه بدست آوردن	پیاده سازی با	تعداد طبقات تا F
(الف)	F	جمع حاصلضربها	۱ها را در نقشه ترکیب کنید	NAND	۲
(ب)	F'	جمع حاصلضربها	۰ها را در نقشه ترکیب کنید	NAND	۳
(پ)	F	ضرب حاصلضربها	F' را در (ب) مکمل کنید	NOR	۲
(ت)	F'	ضرب حاصلضربها	F را در(الف) مکمل کنید	NOR	۳

۳-۷- سایر پیاده سازی های دو طبقه

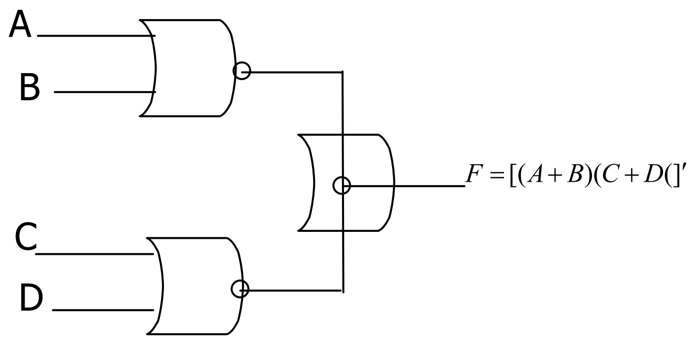
گیت های موجود درمدارهای مجتمع اغلب از نوع NAND و NOR هستند . به همین دلیل عملاً پیاده سازی منطقی با NOR و NAND بسیار اهمیت دارد . در بعضی از گیت های NOR یا NAND نه همه آنها این امکان وجود دارد که با اتصال یک سیم بین

خروجی های دو گیت ، یک تابع منطقی مشخص تولید کرد که این منطق ، منطق اتصالی نامیده می شود . مثلاً وقتی خروجی گیت های NAND – از نوع کلکتور باز TTL – به هم متصل شوند عمل منطقAND اتصالی را انجام می دهند . منطق AND اتصالی که بوسیله دو گیت NAND انجام شده در شکل (۲۲-۳ الف) ترسیم شده است . برای تفکیک گیت AND اتصالی از گیت های قراردادی ، آن را بخطهایی که تا مرکز آن امتداد دارد مشخص می کنیم . گیت AND اتصالی یک گیت فیزیکی نیست بلکه فقط سمبلی است برای توصیف یگ تابع که از اتصال سیمها بدست می آید . تابع منطقی که بوسیله مدار (۲۲-۳ الف) پیاده سازی شده عبارتست از :

$$F=(AB)'.(CD)'=(AB+CD)'$$



(الف) AND اتصالی در گیتهایTTL NAND
کلکتور باز (AND-OR-INVERT)



(ب) OR اتصالی در گیتهایECL
(AND-OR-INVERT)

شکل (۲۲-۳) منطق اتصالی

که تابع AND-OR-INVERT نامیده می شود .

بطور مشابه خروجی NOR در گیت های ECL رامی توان به هم گره زد و تابع OR اتصالی را ایجاد نمود . تابع منطقی که بوسیله مدار (۲۲-۳ ب) پیاده سازی شده عبارتست از :

$$F=(A+B)'+(C+D)'=[(A+B)(C+D)]'$$

که تابع OR-AND-INVERT نامیده میشود .

یک گیت منطقی اتصالی بعنوانگیت طبقه دوم تلقی نمی گدد . چون فقط از اتصال سیمها بوجود آمده است . ولی ، به هنگام بحث مدارهای شکل (٣-٢٢) را به فرم مدارهای دو طبقه می نگریم .

اولین طبقه ، شامل گیت های NAND (یا NOR) و دومین طبقه فقط دارای یک گیت AND (یا OR) است .

ترکیبات مفید گیت ها

از نقطه نظر تئوری دانستن ترکیبات ممکن گیت ها در دو طبقه آموزنده است . در اینجا چهار نوع گیت را بررسی می کنیم : NOR-NAND-OR-AND . اگر به هر طبقه یک نوع گیت را نسبت دهیم در می یابیم که شانزده ترکیب ممکن به فرم دو طبقه وجود دارد ، (می توان گیت های یکسانی را درطبقات اول و دوم بکار برد مانند پیاده سازی NAND-NAND) هشت ترکیب از ترکیبات فوق زائد نامیده می شوند چون در حقیقت یک همل ساده منطقی را انجام می دهند . این نکته در مواردی که طبقه های اول و دوم هر دو دارای گیت های AND هستند بخوبی دیده می شود .

خروجی مدار ، صرفاً تابع AND روی همه متغیرهای ورودی است . هشت فرم مفید باقیمانده هر کدام پیاده سازی را بصورت جمع حاصلضرب ها و یا ضرب حاصلجمع ها تولید می کنند . این هشت فرم مفید عبارتند از :

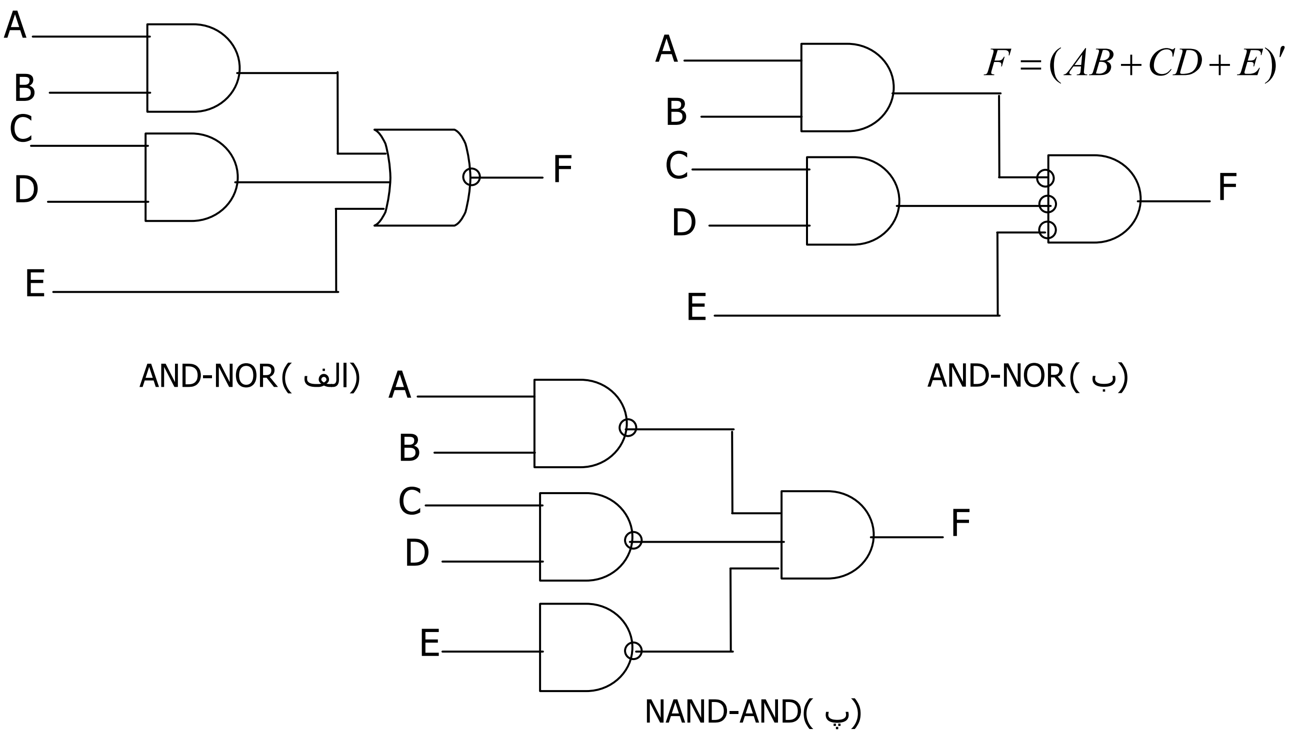
OR-AND	AND-OR
NOR-NOR	NAND-NAND
NAND-AND	NOR-OR
AND-NOR	OR-NAND

در هر یک از فرمهای فوق اولین گیت ذکر شده تشکیل دهنده طبقه اول در پیاده سازی است و دومین گیت به صورت یک گیت منفرد در طبقه دوم قرار می گیرد . توجه کید هر دو فرمی که در یک سطر آمده اند دوگان یکدیگرند .

فرمهای OR-AND و AND-OR فرمهای اولیه و طبقه هستند که در بخش ۵-۳ بحث شدند . همچنین فرمهای NAND-NAND و NOR-NOR در بخش ۶-۳ معرفی گردیدند . چهار فرم باقیمانده نیز در این بخش بررسی می شوند.

پیاده سازی AND-OR-INVERT

دو فرم NAND-AND و AND-NOR معادل یکدیگرندو می توان آنها را هم شرح داد . هر دوی آنها عمل AND-OR-INVERT را همانطور که در شکل (۳-۲۳) نشان داده شده انجام می دهند . فرم AND-NOR با یک عمل معکوس سازی توسط یک دایره کوچک در خروجی گیت NOR فرم AND-OR را شبیه سازی کرده و تابع را بصورت زیر پیاده سازی می نماید :



شکل (۳-۲۳) مدارهای AND-OR-INVERT

بااستفاده از سمبل گرافیکی معادل دیگری برای گیت NOR ، دیاگرام شکل (٢٣-٣ الف) را خواهیم داشت . دقت کنید که متغیر E مکمل نشده چون تنها تغییر صرفاً در سمبل گرافیکی گیت NOR بوده است . حال دایره ها را از پایانه های ورودی در گیت طبقه دوم به پایانه های خروجی طبقه اول منتقل می کنیم .در نهایت یک معکوس کننده برای متغیر E بخاطر نگهداشتن دایره لازم است . و یا می توان معکوس کننده ها را حذف کرد و ورودی E را بصورت مکمل در نظر گرفت . مدار شکل (٢٣-٣ پ) به فرم NAND-AND می باشد که در شکل (٢٢-٣) برای پیاده سازی عمل AND-OR-INVERT نشان داده شده است.

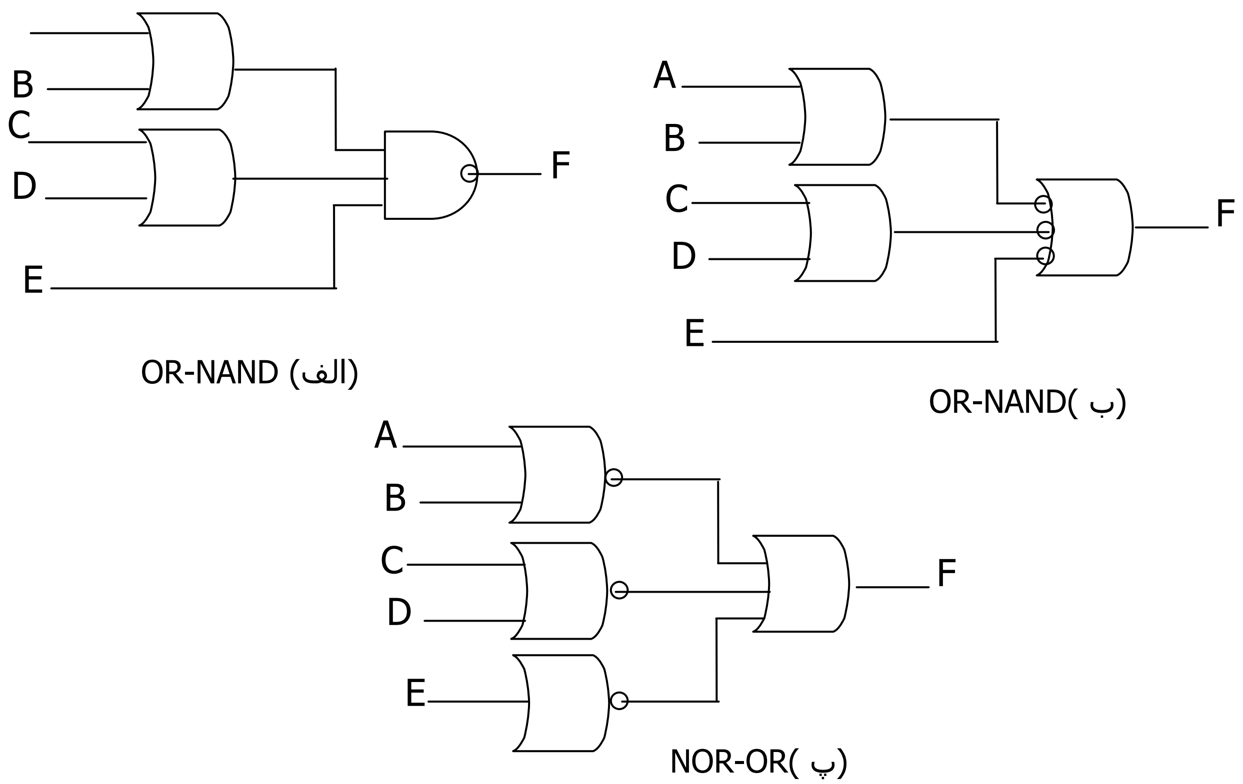
برای پیاده سازی یک AND-OR باید عبارتی ، بر حسب جمع حاصلضرب ها موجود باشد . پیاده سازی AND-OR-INVERT نیز به استثنای معکوس کردنش شبیه AND-OR است . بنابراین اگر مکمل تابع برحسب حاصلضرب ها ساده شود (بوسیله ترکیب ٠ها در نقشه) میتوان F' را بوسیله AND-OR پیاده سازی کرد و وقتی F' از قسمت معکوس کننده عبور کند تابع F تولید می شود . پیاده سازی AND-OR-INEVRT بعداً با یک مثال نشان داده خواهد شد .

پیاده سازی OR-AND-INVERT

فرمهای NOR-OR و OR-NAND ، عمل OR-AND-INVERT را اجرا می نمایند ، که در شکل (٢۴-٣) نشان داده شده است . فرم OR-NAND ، فرم OR-AND را به استثنای معکوس کردن که بوسیله دوایر در خروجی گیت NAND انجام می شود .- شبیه سازی نموده وتابع زیر را پیاده می کند .

$$F = [(A+B)(C+D)E'$$

بااستفاده از سمبل گرافیکی معادل دیگری برای گیت NAND دیاگرام شکل (۲۴-۳)، بدست می آید . مدار در قسمت (پ) بوسیله انتقال دایره های کوچک از ورودی های گیت طبقه دوم به خروجی گیت های طبقه اول حاصل می شود . مدار شکل (۲۴-۳ پ) یک مدار به فرم NOR-OR است که جهت پیاده سازی عمل OR-AND-INVERT در شکل (۲۲-۳) نشان داده شده است .برای پیاده سازی OR-AND-INVERT به عبارتی بر سحب ضرب حاصلجمع ها نیاز داریم . اگر مکمل تابع بر حسب ضرب حاصلجمع ها ساده شود میتوان F' را با قسمت OR-AND پیاده کرد و وقتی F' از یک معکوس کننده عبور کند ، مکمل F یا همان F را در خروجی آن خواهیم داشت .



شکل (۲۳-۳) مدارهای OR-AND-INVERT

خلاصه مطلب و مثال

در جدول (۴-۳) روشهای پیاده سازی یک تابع بول به هر چهارفرم و طبقه خلاصه شده است . به دلیل وجود قسمت معکوس کننده در هر حالت ، مناسب است تا از ساده

سازی F' (مکما تابع) استفاده شود . زیرا وقتی ک F' به یکی از فرمهای پیاده شود . در حقیقت مکمل تابع به فرم AND-OR یا OR-AND بدست می آید. چهار فرم دو طبقه ، این تابع را معکوس کرده و مکمل F' را درخروجی بدست می دهند که در حقیقت همان F است .

مثال ۱۱-۳ : تابع شکل (۱۹-۳ الف) را به چهار فرم دو طبقه که در جدول (۴-۳) آمده پیاده سازی کنید . مکمل تابع برحسب جمع حاصلضرب ها بوسیله ترکیب ۰ ها در جدول ساده شده عبارتست از :

$$F' = x'y + xy' + z$$

جدول (۴-۳) پیاده سازی با سایر فرم های دوطبقه

خروجی از	ساده کردن F' بفرم	پیاده سازی تابع	معادل فرم مفید (b)*	معادل فرم مفید (a)
F	مجموع حاصلضرب ها بوسیله ترکیب ۰ ها درنقشه	AND-OR-INVERT	NAND-AND	AND-NOR
F	ضرب حاصلجمع ها با ترکیب ۱ها در نقشه و سپس مکمل سازی	ORND-INVERT-A	NOR-OR	OR-NAND

* فرم b برای جملات یک متغیره نیاز به یک NOR و یا NAND یک ورودی (معکوس کننده) دارد .

می توان خروجی طبیعی این تابع را بصورت زیر بیان کرد :

$$F = (x'y + xy' + z)'$$

که به فرم AND-OR-INVERT است . پیاده سازی های AND-NOR و NAND-AND در شکل (۲۵-۳ الف) نشان داده شده است . توجه کنید که یک NAND تک ورودی یا

یک گیت معکوس کننده در پیاده سازی NAND-AND لازم است که در حالت AND-NOR چنین نیست . اگر متغیر z' را به فرم جای zدر ورودی بکار ببریم ، می توان معکوس کننده را حذف کرد . فرم OR-AND-INVERT به عبارت ساده شده مکمل تابع بر حسب ضرب حاصلجمع ها نیازدارد که برای بدست آوردن این عبارت می بایت ۱ ها را در نقشه با هم ترکیب کرد :

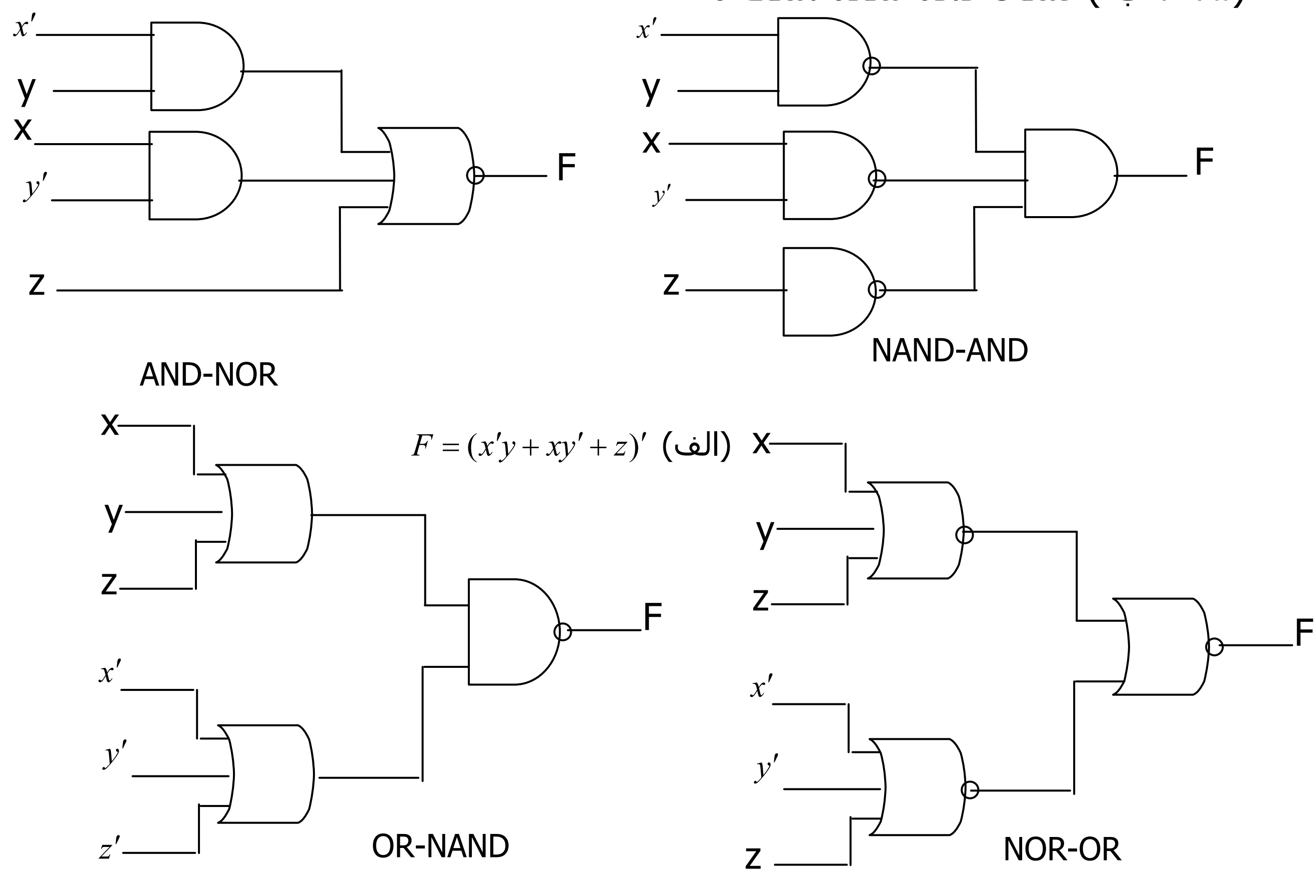
$$F = x'y'z' + xyz'$$

و سپس مکمل تابع را بدست آورد :

$$F' = (x+y+z)(x'+y'+z)$$

خروجی طبیعی F را می توان به فرم زیر بیان کرد :

$F = [(x+y+z)(x'+y'+z)]'$ که به فرم OR-AND-INVERT است . با استفاده از این عبارت می توان تابع را به فرمهای NOR-OR , OR-NAND پیاده سازی کرد که در شکل (۳-۲۵ ب) نشان داده شده است .



$F = (x'y + xy' + z)'$ (الف)

$F = [(x+y+z)(x'+y'+z)]'$ (ب)

۳-۸- حالات بی اهمیت

۱ ها و ۰ های نقشه بیانگر ترکیبی از متغیرهاست که بترتیب تابع را ۱ و یا ۰ می نامند . معمولاً ترکیبات حاصل از جدول درستی حالاتی هستند که تحت آنها تابع برابر ۱ می باشد ودر سایر مکانهای نقشه مقدارتابع ۰ فرض می گردد . این فرض همیشه صحیح نیست ، زیرا در بعضی کاربردها ترکیبات معینی از متغیر های ورودی هرگز وجود ندارد بعنوان مثال یک کد دهدهی چهار بیتی دارای شش ترکیب بالا استفاده است . تابعی که خروجی های نامشخص یا بلااستفاده ، در ازای برخی از ترکیبات ورودی را دارد به توابع ناقص معروفند . در اغلب کاربردهای ما درواقع به اینکه تابع درازای مینترم های نامعین جه مقداری دارد توجهی نمی کنیم . به این دلیل مینترم نامعین را در تابع ، حالات بی اهمیت نام می گذاریم . این حالات بی اهمیت در نقشه برای ساده سازی بیشتر عبارت بول بکار می روند .

باید توجه داشت که یک مینترم بی اهمیت ترکیبی از متغیرهاست که مقدار منطقی آن نامشخص است . به همین دلیل است که نمی توان یک حالت بی اهمیت را در نقشه با ۱ نشان داد زیرا این عمل به این معنی است که تابع برای این ترکیب خاص ورودی ها همواره برابر ۱ است . بطور مشابه گذاشتن ۰ در مربع های نقشه به معنی ۰ بودن همیشگی تابع است . لذا برای تشخیص ۰ ها و ۱ ها واقعی تابع ، حالت بی اهمیتی را با x نماش می دهیم . بنابراین یک X بیانگر این واقعیت ایت که ما به ازای مینترم خاصی به ۰ یا ۱ شدن F اهمیتی نمی دهیم .

به هنگام انتخاب مربع های همجوار درنقشه برای ساده نمودن تابع ، با این ایده که ساده ترین عبارت حاصل گردد ، x ها را برابر ۰ و یا ۱ فرض می نماییم . در ساده

سازی تابع می توانیم با توجه به ساده ترین فرم ممکن برای تابع به حالات بی اهمیت ۰ یا ۱ بدهیم .

مثال : ۱۲-۳ : تابع بول زیر را ساده کنید .

$$F(w,x,y,z)=\sum\ (1,3,7,11,15)$$

حالات بی اهمیت عبارتند از :

$$d(w,x,y,z)=\sum\ (0,2,5)$$

مینترم های تابع F ، ترکیبی از متغیرهاست که تابع را ۱ می کند . مینترم d ترکیبات بی اهمیتی هستند که ممکن است ۰ یا ۱ باشند . ساده سازی در شکل (۲۶-۳) نشان داده شده است . مینترم های F با ۱ و جملات d یا X مشخص شده اند و بقیه مربع ها با ۰ پر شده اند . برای بدست آوردن عبارت ساده شده بصورت جمع حاصلضرب ، ما باید هر پنج ۱ موجود در نقشه را در نظر بگیریم ، ولی ممکن است X ها را در نظر بگیریم ، و یا نگیریم و این به راه ساده سازی تابع وابسته است . جمله yz چهار مینترم را در ستون سوم پوسس می دهد . مینترم باقیمانده m_1 می تواند با مینترم m_3 ترکیب شده و جمله سه متغیره $w'x'z'$ را بدهد . با این وجود ، با منظور کردن یکیا دو x همجوار ، ما می توانیم چهار مربع مجاور را ترکیب کنیم تا جمله دو متغیره حاصل گردد . در بخش (الف) از دیاگرام ، مینترم های بی اهمیت ۰ و ۲ با ۱ ها ترکیب شده اند که حاصل آن تابع ساده شده زیر است :

$$F=yz+w'x'$$

در بخش (ب) مینترم بی اهمیت ۵ با ۱ جایگزین شده و تابع ساده چنین است .

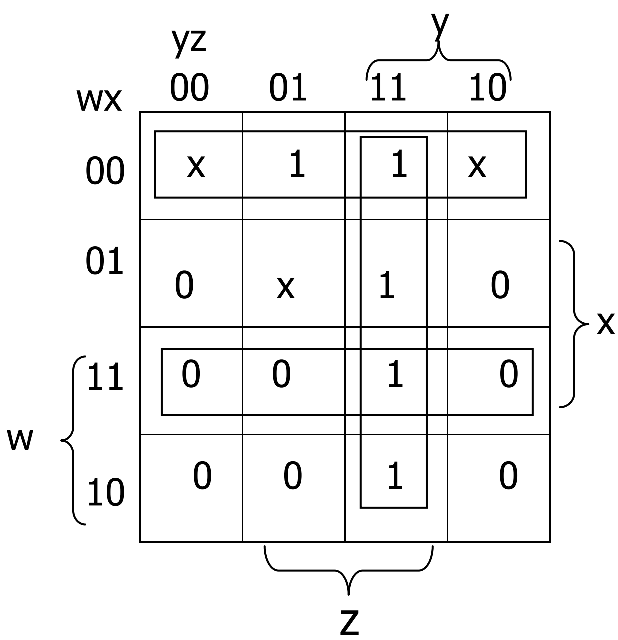
$$F=yz+w'z$$

هر یک از عبارات فوق خواسته های مثال را برآورده می سازد .

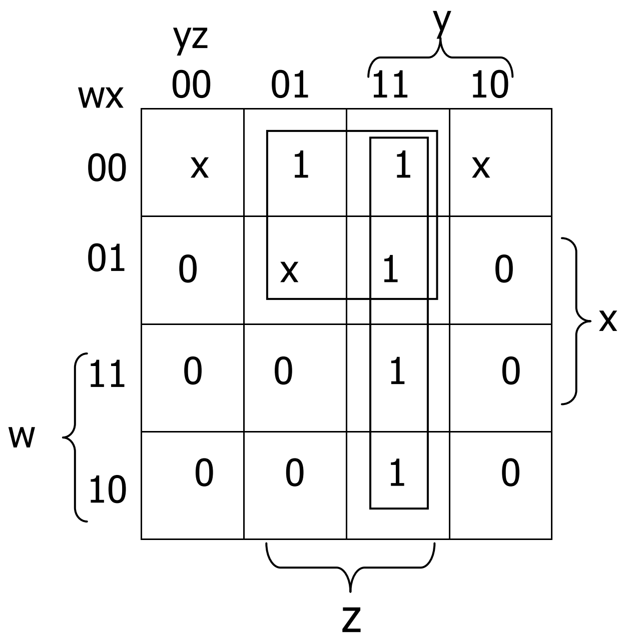
مثال فوق نشان داد که مینترم های بی اهمیت در نقشه ابتدا با X علامت گذاری می شوند و بعداً به ۰ یا ۱ بدل می گردند . انتخاب بین۰ و ۱ به راهی که تابع غیر کامل یا ناقص ساده می شوند وابسته است . هر گاه انتخاب صورت گیرد ، تابع ساده شده حاصل متشکل از یک مجموع از مینترم ها و از جمله آنهایی است که ابتدا معین نشده بود ولی بعداً با ۱ جایگزین شده اند. دو عبارت ساده شده در مثال ۱۲-۳ را ملاحظه نمایید .

$$F(w,x,y,z) = yz + w'x' = \sum\ (0,1,2,3,7,11,15)$$

$$F(w,x,y,z) = yz + w'z' = \sum\ (1,3,5,7,11,15)$$



$F = yz + w'z'$ (الف)



$F = yz + w'z$ (ب)

شکل (۲۶-۳) مثال مربوط به حالات بي اهميت

هر دو عبارت مینترم های 15.11.7.3.1 که تابع F را ۱ می کند ، دارا هستند . با مینترم های بی اهمیت ۰،۲،۵ بصورت متفاوتی درهر عبارت برخورد شده است . اولین عبارت شامل مینترم های ۰ و ۲ با مقدار ۱ و مینترم های ۵ با ۰ می باشد.

دومین عبارت شامل مینترم ۵ برابر با ۱ و مینترم های ۰ و ۲ برابر ۰ است . دو عبارت دو تابعی را نشان می دهند که بصورت جبری برابر نیستند .

هر دو ، مینترم های مشخص شده را پوشش می دهند ، ولی مینترم های بی اهمیت در آنها فرق دارد . هر دو عبارت قابل قبول است زیرا اختلاف آنها فقط در مقدار F به ازای مینترم های بی اهمیت است .

می توان عبارت حاصلضرب مجموعی نیز برای تابع شکل (۲۶-۳) بدست آورد .در اینحالت ، تنها راه ترکیب ۰ ها این است که مینترم های ۰ و ۲را ۰ گرفته و مکمل تابع را بدست آوریم .

$$F' = z' + wy'$$

با گرفتن مکمل از F ، عبارت ساده بصورت حاصلضرب مجموع بدست می آید .

$$F(w,x,y,z) = z(w' + y) = \sum (1,3,5,7,11,15)$$

در این حالت مینترم های ۰ و ۲ با ۰ و مینترم ۵ با ۱ مقدار می گیرند .

روش جدول بندی (کوئین – مک کلاسکی) :

روش سیستماتیک برای ساده سازی عبارات منطقی : (مثال :

$$f=\sum m(0,1,2,8,10,11,14)$$

۱- دسته بندی مینترمها بر اساس تعداد یکها (صعودی) :

mi	w	x	y	z
0	0	0	0	0
11	0	0	0	1
2	0	0	1	0
8	1	0	0	0
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1
14	0	1	1	0

(0,1)	000–
(0,2)	00–0
$\underline{(0,8)}$	$\underline{-000}$
(2,10)	–010
$\underline{(8,10)}$	$\underline{10-0}$
(10,11)	101–
(10,14)	1–10

$$\left.\begin{matrix}(0,2,8,10)-0-0\\(0,8,2,10)-0-0\end{matrix}\right\}x'z'$$

$$\mathrm{f}=x'z'+w'x'y'+wx'y+wy'z$$

۲- هر دو مینترمهایی که در یک متغیر اختلاف داشته باشند قابل ترکیبند .(تشکیل دسته های دوتایی) هر مینترم در هر دسته با جملات دسته بعدی که پایین تر از خود قابل ترکیب است و مینترمهای شرکت کننده را تیک می زنیم .

۳- تشکیل دسته های چهار تایی : بایستی مینترمها نظیر به نظیر افزایش باشند . $\begin{matrix}a & , & b\\ a' & , & b'\end{matrix}\rightarrow a>a',b>b'$ و باز هم تیک می زنیم آنهایی که تیک نخورده اند پوشش داده نشده اند .

مثال : $f=\sum m(0,1,2,8,10,11,14,18)$

روش اصلاح یافته روش جدول بندی :

۱- همان روش ۲- مینترمهایی را که در 2^n تفاوت دارند ترکیب می کنیم که نیاز به نوشتن معادل باینری نیست و میزان اختلاف (2^n) در یک پرانتز نوشته شود .

0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
8	1	0	0	0
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1
14	1	0	1	0
15	1	1	1	1

(0,1)	(1)
(0,2)	(2)
(0,8)	(8)
(2,8)	(8)
(8,10)	(2)

(10,11)	(1)
(10,14)	(4)
(11,15)	(4)
(14,15)	(1)

۳- برای دسته های چهارتایی دسته های دوتایی با هم ترکیب می شوند که علاوه بر شرط افزایش اعداد داخل پرانتز آنها یکی باشد . $a' - a = b' - b = \overline{2^n} \leftarrow \begin{matrix} a & b \\ a' & b' \end{matrix}$

(0,1)	(1)
(0,2)	(2)
(0,8)	(8)
(2,10)	(8)
(8,10)	(2)
(10,11)	(1)
(10,14)	(2)
(11,15)	(4)
(14,15)	(1)

(0,2,8,10)	(2,8)	معادلند
(0,8,2,10)	(8,2)	
(10,11,14,15)	(1,4)	معادلند
(10,14,11,15)	(4,1)	

	w	x	y	z
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1
14	1	1	1	0
15	1	1	1	1

$= wy$

	w	x	y	z
0	0	0	0	0
2	0	0	1	0
8	1	0	0	0
10	1	0	1	0

$= x'z'$

$$\Rightarrow F = wy + x'z' + w'z'y'$$

اعدادی در پرانتز باقی مانند 2^n هستند که n ها مکان متغیرهای حذف شده را نشان می دهد سپس مینترمها را می نویسیم و اسامیها را می یابیم .

مثال :

$$F = \sum m(1,4,6,7,8,9,10,11,15)$$

1
4
8
6
9
10
7
11
15

(1,9)	(8)
(4,6)	(2)
(8,9)	(1)
(8,10)	(2)
(8,10)	(1)
(9,11)	(2)
(10,11)	(1)
(7,15)	(8)
(11,15)	(4)

(8,	0,	10,	11)	(1,2)
(8,	10,	9,	11)	(2,1)
0	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1

$PI_1 = wx'$

$PI_1 = x'y'z$

$PI_3 = w'xz'$

$PI_4 = w'xy$

$PI_5 = xyz$

$PI_6 = wyz$

1	(1,9)	(8)
4	(4,6)	(2)
8	(8,9)	(1)
6	(8,10)	(2)
9	(8,10)	(1)
10	(9,11)	(2)
7	(10,11)	(1)
11	(7,15)	(8)
15	(11,15)	(4)

(8,	0,	10,	11)	(1,2)
(8,	10,	9,	11)	(2,1)
0	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1

$PI_1 = wx'$
$PI_1 = x'y'z$
$PI_3 = w'xz'$
$PI_4 = w'xy$
$PI_5 = xyz$
$PI_6 = wyz$

روش پیدا کردن اسامیها :

مینترمهایی که تنها توسط یک PI تیک خورده اند را علامت می زنیم .

	1	4	6	7	8	9	10	11	15
PI_1					*	*	*	*	
PI_2	*					*			
PI_3		*	*						
PI_4		*	*						
PI_5			*						*
PI_6								*	*
	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓	

	7	15
PI_4	*	
PI_5	*	*
PI_6		*

مثال : $F(A,B,C,D,E) = \sum(1,4,6,10,20,22,24,26) + \sum d(0,11,16,17)$

0
1
4
16
6
10
20
24
11
22
26
27

(0,1)	(7)
(0,4)	(4)
(0,16)	(16)
(4,6)	(2)
(4,20)	(16)
(16,20)	(4)
(16,24)	(8)
(6,22)	(16)
(10,11)	(1)
(10,26)	(16)
(20,22)	(2)
(24,26)	(2)
(11,27)	(16)
(26,27)	(1)

(0,4,16,20)	(4,16)
(0,16,4,20)	(16,4)
(4,6,20,22)	(2,16)
(4,20,6,22)	(16,2)
(10,11,26,27)	(1,16)
(10,26,11,27)	(16,1)

	1	4	6	10	20	22	24	26
PI_1		*			*			
PI_2		*	*		*	*		
PI_3				*				
PI_4	*							*
PI_5							*	
PI_6							*	*
	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓

در ماکسترم : درماکسترم بر حسب تعداد صفرها بررسی می شود در ترکیب دو دسته ای باید ماکسترم بالایی بزرگتر باشد . در نوشتن PI ها ما جملات حاصل جمع داشته و قوانین ماکسترم ها را رعایت می کنیم نهایتاً f همان حاصلضرب PI ها می شود .

تمرین : تابع مقابل را ساده نمایید. $F = \pi M\,(0,1,2,3,4,6,10,11,12,15)$