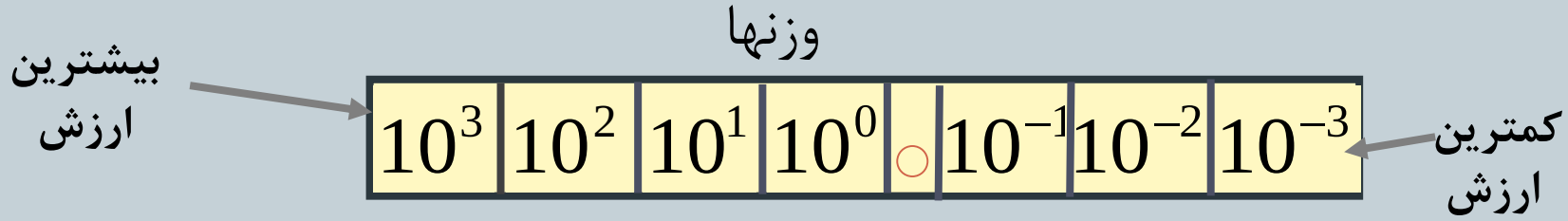
مدار منطقی

فصل اول
مبنای اعداد

By: A.Abbaszadeh

مبنای اعداد در سیستمهای دیجیتال

- در محاسبات روزمره از مبنای ده اعداد استفاده می کنیم
- رقمها بین صفر تا ۹ تغییر می کنند.
- هر رقم در یک عدد وزنی دارد که وزن آن توانی از ۱۰ می باشد.



- به عنوان مثال عدد ۳۹۲۱,۸۵ بصورت زیر نمایش داده می شود.

$$3\times10^3+9\times10^2+2\times10^1+1\times10^0+8\times10^{-1}+5\times10^{-2}$$

مبنای اعداد در سیستمهای دیجیتال

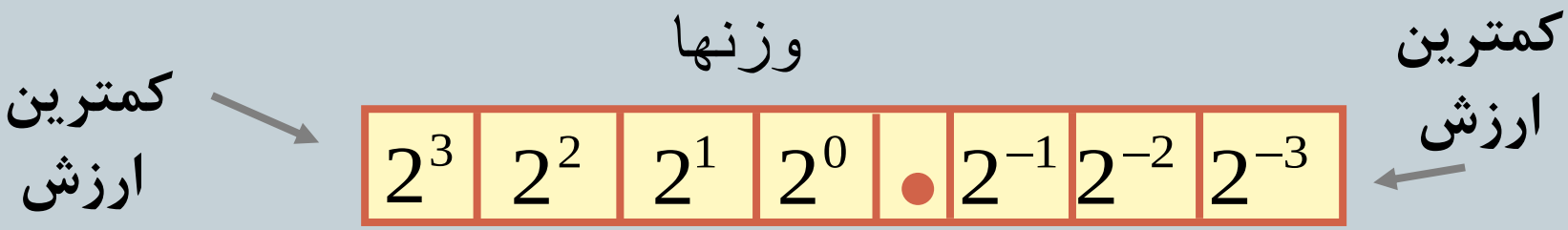
- به طور کلی، یک عدد در مبنای r به صورت حاصلضرب توانهای r در ارقام مربوطه بیان می گردد:

$$a_4a_3a_2a_1a_0.a_{-1}a_{-2} =$$
$$a_4 \times r^4 + a_3 \times r^3 + a_2 \times r^2 + a_1 \times r^1 + a_0 \times r^0 + a_{-1} \times r^{-1} + a_{-2} \times r^{-2}$$

- ضرایب a_x بین صفر تا r-1 تغییر می کنند.
- برای تفکیک اعداد در مبناهای مختلف،ضرایب را در داخل پرانتزها نوشته و اندیس مبنا را در زیر آن می گذاریم (به جز دراعداد دهدهی).

مبنای اعداد در سیستمهای دیجیتال

- در سیستمهای دیجیتال از مبنای ۲ اعداد استفاده می شود.
- بنابراین ارقام فقط صفر یا یک می باشند و می توان آنها را با دو سطح ولتاژ صفر یا ۵ ولت نشان داد (ارقام در یک عدد دودویی بیت خوانده می شوند.)
- هر رقم در یک عدد وزنی دارد که وزن آن توانی از ۲ می باشد.



- به عنوان مثال عدد ۱۰۱۱۱,۰۱ بصورت زیر نمایش داده می شود.

$$1\times2^4+0\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+1\times2^0+0\times2^{-1}+1\times2^{-2}=$$
$$=1\times16+0\times8+1\times4+1\times2+1\times1+0\times0.5+1\times0.25=23.25$$

تبدیل مبنای اعداد

- تبدیل یک عدد از مبنای r به مبنای ۱۰ با بسط آن بصورت سری از توانها و جمع آنها انجام می گیرد.
- مثال عدد ۲(۱۰۱۱,۱۰۱) را به مبنای ۱۰ تبدیل کنید.

$$1011.101 =$$

$$1\times 2^3 + 0\times 2^2 + 1\times 2^1 + 1\times 2^0 + 1\times 2^{-1} + 0\times 2^{-2} + 1\times 2^{-3} =$$

$$8 + 2 + 1 + .5 + .25 = 11.75$$

تبدیل مبنای اعداد

- برای تبدیل مبنای ۱۰ به مبنای r از تقسیمات متوالی بر r استفاده می کنیم
- عدد ۳۷ را به مبنای ۲ ببرید

خرج قسمت	باقیمانده	
37/2= 19	1	a0=1
19/2= 9	1	a1=1
9/2 = 4	1	a2=1
4/2 = 2	0	a3=0
2/2 = 1	0	a4=0
½ = 0	1	a5=1

$37=(100111)_2$

تبدیل مبنای اعداد

- برای تبدیل اعداد اعشاری بجای تقسیم از ضرب استفاده می کنیم
- مثال: عدد ۰,۶۷۵ را به مبنای ۲ ببرید

قسمت صحیح		قسمت اعشار	
0.6875 *2=	1	0.375	$a_{-1}=1$
0.375*2 =	0	0.75	$a_{-2}=0$
0.75*2 =	1	0.5	$a_{-3}=1$
0.5*2 =	1	0	$a_{-4}=1$

$0.6875=(0.1011)_2$

- ضربهای متوالی را تا جاییکه قسمت اعشار صفر شود ادامه می دهیم

تبدیل مبنای اعداد

- برای تبدیل مبنای ۲ به مبنای ۸ از قسمت کم ارزش بیتها را ۳ تا ۳ تا جدا کرده و معادل هر کدام را در مبنای ۸ می نویسیم
- مثال: عدد ۲(۱۰۱۱۰۰۱۱۰۱۰) را به مبنای ۸ ببرید.

$(10101100110)_2=(2546)_8$

$a_0=110=6$

$a_1=100=4$

$a_2=101=5$

$a_3=10=2$

تبدیل مبنای اعداد

- برای تبدیل مبنای ۸ به مبنای۲ بجای هر رقم مبنای ۸، ۳ بیت معادل مبنای ۲ آن را قرار می دهیم
- مثال: عدد $(۵۳۴۷)_{۸}$ را به مبنای ۲ ببرید. $(۵۳۴۷)_{۸}=(۱۰۱۰۱۱۱۰۰۱۱۱)_{۲}$

$a_۲a_۱a_۰=۷=۱۱۱$

$a_۵a_۴a_۳=۴=۱۰۰$

$a_۸a_۷a_۶=۳=۰۱۱$

$a_{۱۱}a_{۱۰}a_۹=۵=۱۰۱$

- برای تبدیل مبنای ۲ به ۱۶ و یا بالعکس همان کار را انجام می دهیم ولی بجای ۳ بیت ۴ بیت جدا می کنیم
- در مبنای ۱۶ که به مبنای هگزا نیز معروف است بجای ارقام بزرگتر از ۹ از حروف A تا B استفاده می شود.

تبدیل مبنای اعداد

مبنای ۱۶	مبنای ۸	مبنای ۲	مبنای ۱۰
۱	۱	۱	۱
۲	۲	۱۰	۲
۳	۳	۱۱	۳
۴	۴	۱۰۰	۴
۵	۵	۱۰۱	۵
۶	۶	۱۱۰	۶
۷	۷	۱۱۱	۷
۸	۱۰	۱۰۰۰	۸
۹	۱۱	۱۰۰۱	۹
A	۱۲	۱۰۱۰	۱۰
B	۱۳	۱۰۱۱	۱۱
C	۱۴	۱۱۰۰	۱۲
D	۱۵	۱۱۰۱	۱۳
E	۱۶	۱۱۱۰	۱۴
F	۱۷	۱۱۱۱	۱۵

By: A.Abbaszadeh

مکمل اعداد

- مکمل ها در سیستمهای دیجیتال برای ساده کردن عمل تفریق و یا عملیات منطقی به کار می روند.
- برای هر مبنایی مانند r دو نوع مکمل وجود دارد:

۱- مکمل مبنای کاهش یافته(مکمل $r-1$)

برای عددی مانند a در مبنای r که دارای n رقم می باشد. مکمل $r-1$ برابر بصورت زیر تعریف می شود.

$$r-1 \text{ مکمل} \quad = r^n - 1 - a$$

در سیستم دهدهی مکمل $r-1$ بصورت مکمل ۹ تعریف می شود و در سیستم دودویی بصورت مکمل ۱ تعریف می شود.

مکمل اعداد

- مثال: مکمل ۹ عدد ۵۳۴۷۸ را محاسبه کنید.

$$10^n - 1 - a = 9999 - 53478 = 46521$$

- از مثال بالا مشخص است که برای محاسبه مکمل ۹ باید تمام ارقام را از ۹ کم کنیم
- مثال: مکمل ۱ عدد ۲(۱۰۱۱۱۰) را محاسبه کنید.

$$2^n - 1 - a = 100000 - 1 - a = 111111 - a =$$
$$111111 - 101110 = 010001$$

- از مثال بالا مشخص است که برای محاسبه مکمل ۱ باید تمام ارقام را از ۱ کم کنیم یا به عبارت دیگر یکها را به صفر و صفرها را به یک تبدیل کنیم

مکمل اعداد

۲- مکمل مبنا (مکمل r)

برای عددی مانند a در مبنای r که دارای n رقم می باشد. مکمل r برابر بصورت زیر تعریف می شود.

$$\text{مکمل } r = r^n - a$$

در سیستم دهدهی مکمل r بصورت مکمل ۱۰ تعریف می شود و در سیستم دودویی بصورت مکمل ۲ تعریف می شود.

مکمل اعداد

- مثال: مکمل ۱۰ عدد ۳۲۷۶۰۰ را محاسبه کنید.

$$10^n - a = 1000000 - 327600 = 672400$$

- از مثال بالا مشخص است که برای محاسبه مکمل ۱۰ صفرهای کم ارزش تغییر نمی کنند اولین رقم غیر صفر از ۱۰ و بقیه ارقام از ۹ کم می شوند.
- مثال: مکمل ۲ عدد ۲(۱۰۱۱۱۰) را محاسبه کنید.

$$2^n - a = 100000 - a =$$

$$1000000 - 101110 = 010010$$

- از مثال بالا مشخص است که برای محاسبه مکمل صفرهای کم ارزش و اولین یک تغییر نمی کنند بقیه یکها به صفر و صفرها به یک تغییر می کنند.

تفریق به کمک مکمل

- در سیستم های دیجیتال عمل تفریق نیز با استفاده از جمع کننده ها انجام می گیرد.
- بنابراین باید بتوانیم با استفاده از عمل جمع تفریق را انجام دهیم.
- برای محاسبه M-N در مبنای r عدد M را با مکمل r عدد N جمع می کنیم.

$$M+\left(r^n-N\right)=\left(M-N\right)+r^n$$

- همانطور که از معادله بالا پیداست جمع با مکمل r معادل تفریق کردن است ولی تنها یک مولفه r^n در معادله بالا باید حذف شود
- اگر M>N باشد نتیجه M-N مثبت بوده و عدد r^n بصورت رقم نقلی ظاهر خوهد شد که از آن صرفنظر می کنیم.

تفریق به کمک مکمل

- اگر $M<N$ باشد نتیجه $M-N$ منفی خواهد شد. بنابراین از نتیجه مکمل r گرفته در منفی ضرب می کنیم.

$$M+\left(r^n-N\right)=\left(M-N\right)+r^n=r^n-\left(N-M\right)$$

- همانطور که از معادله بالا مشخص است جمع M با مکمل r عدد N برابر مکمل r عدد$N-M$ می باشد. بنابراین اگر از نتیجه مکمل r بگیریم $N-M$ خواهد شد که باید در منفی ضرب کنیم تا $M-N$ حاصل شود.

تفریق به کمک مکمل

- **مثال : با استفاده از مکمل ۱۰ تفریق ۲۴۱۲-۷۳۵۶ را انجام دهید.**

M	= 7356
۱۰ مکملN	= ۷۵۸۸
حاصل جمع	=۱۴۹۴۴
چشم پوشی از رقم نقل	-۱۰۰۰۰
جواب	=۴۹۴۴

- **مثال : با استفاده از مکمل ۱۰ تفریق ۷۳۵۶-۲۴۱۲ را انجام دهید.**

M	= ۲۴۱۲
۱۰ مکملN	= ۲۶۴۴
حاصل جمع	= ۵۰۵۶
گرفتن مکمل ۱۰	۴۹۴۴
جواب	=-۴۹۴۴

تفریق به کمک مکمل

- مثال : با استفاده از مکمل ۲ تفریق ۱۰۱۱۰۱۰۰–۱۰۰۱۱۰۱۱را انجام دهید.

M	=۱۰۰۱۱۰۱۱
N مکمل ۲	= ۰۱۰۰۱۱۰۰
حاصل جمع	=۱۱۱۰۰۱۱۱
گرفتن مکمل ۲	۰۰۰۱۱۰۰۱
جواب	=-۱۱۰۰۱

- مثال : با استفاده از مکمل ۱۰ تفریق ۱۰۰۱۱۰۱۱–۱۰۱۱۰۱۰۰را انجام دهید.

M	= ۱۰۱۱۰۱۰۰
N مکمل ۱۰	= ۰۱۱۰۰۱۰۱
حاصل جمع	=۱۰۰۰۱۱۰۰۱
چشم پوشی از رقم نقلی	-۱۰۰۰۱۱۰۰۱
جواب	= ۱۱۰۰۱

اعداد دودویی علامتدار

- در حساب معمولی، یک عدد منفی را با یک علامت منها و عدد مثبت را با علامت بعلاوه نشان می دهند.
- به
- دلیل محدودیت در سخت افزار، کامپیوترها باید هر چیزی را با ارقام دودویی نشان دهند.
- سه روش برای نمایش اعداد علامتدار وجود دارد

۱- استفاده از بیت علامت (اگر با ارزش ترین بیت سمت چپ ۰ باشد عدد مثبت و اگر ۱ با شد عدد منفی است).

00001101=+13
10001101=-13

اعداد دودویی علامتدار

۲- استفاده از مکمل ۱ اعداد برای نمایش اعداد منفی

00001101=+13
۱۱۱۱۰۰۱۰ =-13

۳- استفاده از مکمل ۲ اعداد برای نمایش اعداد منفی

00001101=+13
۱۱۱۱۰۰۱۱ =-13

هم در شیوه نمایش مکمل یک و هم مکمل ۲ اعداد منفی با ۱ و اعداد مثبت با صفر شروع می شوند

نمایش مکمل ۲ اعداد منفی رایج تر است

اعداد دودویی علامتدار

- در سیستم نمایش علامتدار اعداد چون اعداد منفی با مکمل ۲ نمایش داده می شوند کافی است دو عدد را باهم جمع کرده از بیت نقلی صرفنظر کنیم.

+6	00000110	-6	11111010
+13	00001101	+13	00001101
+19	00010011	+7	00000111
+6	00000110	- 6	11111010
- 13	11110011	- 13	11110011
- 7	11111001	- 19	11101101

- توجه کنید که اعداد منفی باید از ابتدا به صورت متمم ۲ باشد و حاصل جمع اگر منفی باشد به صورت متمم ۲ خواهد بود.

اعداد دودویی علامتدار

- برای یافتن یک جواب صحیح، باید مطمئن بود که برای جای دادن نتیجه، تعداد کافی بیت وجود اگر با دو عدد n بیتی شروع کنیم و حاصل یک عدد $n+1$ بیت را اشغال کند گوییم سرریز رخ داده است.
- برای انجام عمل تفریق مفروق را مانند یک عدد منفی در نظر می گیریم و از ان مکمل می گیریم با مفروق منه جمع می کنیم اگر بیت نقلی داشت از آن صرفنظر می کنیم.

کدهای دودویی

- یک کد دودویی n بیتی متشکل از n بیت است که 2^n ترکیب ممکن از ۱ها و صفرها و هر ترکیب یک عنصر از مجموعه کد شده را نمایش می دهد.
- ترکیب بیتی یک کد n بیتی با شمارش دودویی از ۰ تا 2^{n-1} حاصل می گردد. به هر عنصر باید یک ترکیب بیتی دودویی منحصر بفرد اختصاص یابد و هیچ دو عنصر دارای مقدار یکسانی نمی باشند.
- انواع کدهای دودویی
  - کد BCD
  - کد ۲۴۲۱
  - کد افزونی ۳
  - کد ۸۴۲۱

کد BCD

- ما در محاسبات به سیستم دهدهی عادت داریم
- ولی در سیستمهای دیجیتال فقط بیتهای صفر و یک معتبرند.
- برای حل مشکل بعضا سیستمهای دیجیتال اعداد را بصورت دهدهی دریافت کرده محاسبه را بصورت دودویی انجام داده و در نهایت بصورت دهدهی نمایش می دهند
- برای انجام این کار به ازاء هر رقم دهدهی یک کد ۴ بیتی که معادل دودویی آن می باشد اختصاص داده می شود که به آن کد BCD گفته می شود.
- بنابراین کد BCD یک کد ۴ بیتی برای نمایش اعداد دهدهی می باشد که بین صفر(۰۰۰۰) تا ۹(۱۰۰۱) تغییر می کند و کدهای ده(۱۰۱۰) تا پانزده(۱۱۱۱) در این کد بی معنی هستند.

کد BCD

کد BCD	سمبل دهدهی
0000	0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7
1000	8
1001	9

کدBCD

- مثال: کد BCD و کد دودویی عدد ۳۴۷ را محاسبه کنید.

$$347=(0011\ \ 0100\ 0111)_{BCD}=(101011011)_2$$

- توجه داشته باشید که هنگام جمع دو رقم BCD وقتی مجموع بیشتر از ۹ باشد باید رقم نقلی تولید شود.

کدهای دودویی

رقم دهدهی	BCD ۸٤۲۱	۲٤۲۱	افزونی ۳	۱-۲-٤-۸
0	0000	0000	0011	0000
1	0001	0001	0100	0111
2	0010	0010	0101	0110
3	0011	0011	0110	0101
4	0100	0100	0111	0100
5	0101	1011	1000	1011
6	0110	1100	1001	1010
7	0111	1101	1010	1001
8	1000	1110	1011	1000
9	1001	1111	1100	1111
ترکیبات	1010	0101	0000	0001
	1011	0110	0001	0010
بیتی بکار	1100	0111	0010	0011
	1101	1000	1101	1100
نرفته	1110	1001	1110	1101
	1111	1010	1111	1110

By: A.Abbaszadeh

کد ASCII

- کد دودویی استاندارد برای کاراکترهای الفبا کد (*ASCII*) است. این کد از هفت بیت برای کد کردن ۱۲۸ کاراکتر، استفاده می کند.

	b7b6b5							
b4b3b2b1	000	001	010	011	100	101	110	111
0000	NUL	DLE	SP	0	@	P	`	P
0001	SOH	DC1	!	1	A	Q	A	Q
0010	STX	DC2	"	2	B	R	B	R
0011	ETX	DC3	#	3	C	S	C	S
0100	EOT	DC4	$	4	D	T	D	T
0101	ENQ	NAK	%	5	E	U	E	U
0110	ACK	SYN	&	6	F	V	F	V
0111	BEL	ETB	'	7	G	W	G	W
1000	BS	CAN	(	8	H	X	H	X
1001	HT	EM	)	9	I	Y	I	Y
1010	LF	SUB	*	:	J	Z	J	Z
1011	VT	ESC	+	;	K	[	K	{
1100	FF	FS	,	<	L	\	L	|
1101	CR	GS	-	=	M	]	M	}
1110	SO	RS	.	>	N	^	N	~
1111	SI	US	/	?	O	_	o	DEL

کدهای تشخیص خطا

- برای تشخیص خطاها در مخابره یا پردازش داده، گاهی بیت هشتمی به نام بیت توازن به کاراکتر اسکی اضافه می شود. بیت توازن، بیتی اضافی است که حاوی پیامی بوده و طی آن تعداد ۱های کل، زوج یا فرد خواهد شد. دو کاراکتر زیر به همراه توازن زوج یا فرد دیده می شوند:

		توازن زوج	با توازن فرد
ASCII A	1000001	01000001	11000001
ASCII T	1010100	11010100	01010100

- در هر حالت یک بیت به سمت چپ ترین مکان کد می افزاییم تا تعداد ۱ها در کاراکتر برای توازن زوج، زوج و یا اینکه تعداد ۱ها در کاراکتر برای توازن فرد، فرد گردد. به طور کلی یکی از دو توازن اختیار می شود ولی توازن زوج معمول تر می باشد.