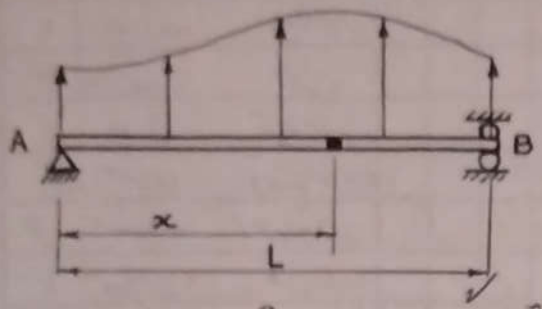
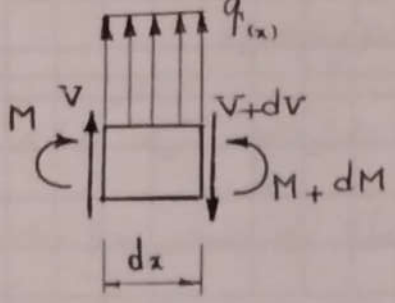
- رسم دیاگرام نیروی برشی و ممان خمشی در طول تیر تحت بارگذاری با روش انتگرالی



تیر AB تحت بارگذاری گسترده غیر یکنواخت $q_{(x)}$ است که در آن شدت بار q تابع x (فاصله از ابتدای بارگذاری) است. q می‌تواند بر حسب N/m یا lb/in یا lb/ft و یا واحدهای دیگر بیان شود. با فرض اینکه در فاصلهٔ x از ابتدای بارگذاری، طول جزیی از تیر به اندازهٔ dx از تیر تحت بارگذاری $q(x)$ دارای شدت بار ثابتی باشد (چون dx طول جزیی است و به سمت صفر میل می‌کند) می‌توان معادلات تعادل نیرو گشتاور را برای این طول جزیی نوشت:



$$\Sigma F_y = 0$$

$$\Rightarrow V - (V+dV) + q(dx) = 0$$

$$\Rightarrow dV = q(dx)$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dx} = q \quad (I) \qquad V = \int_{x_1}^{x_2} q(dx) + C_1 \quad (II)$$

از روابط بالا می‌توان به نتایج زیر رسید:

۱- شیب منحنی نیروی برشی در هر نقطه از تیر تحت بارگذاری $q_{(x)}$، برابر با مقدار شدت بارگذاری در آن نقطه از تیر است (معادلهٔ I). $q_{(x)}$، مثبت است اگر جهت بارگذاری به سمت بالا باشد و برعکس.

۲- نیروی برشی در نقطه‌ای از تیر تحت بارگذاری $q_{(x)}$، برابر با مساحت سطح زیر منحنی شدت بار تا آن نقطه است (معادلهٔ II). نیروهای نقطه‌ای با مقادیر مثبت (اگر به سمت بالا باشند) و با مقادیر منفی (اگر به سمت پایین باشند) به این مساحت اضافه می‌شوند. مساحت‌ها با در نظر گرفتن علامت مثبت یا منفی‌شان جمع می‌شوند.

۳- xی که در معادلات انتگرال ظاهر می‌شود، فقط مربوط به بازه‌ای است که دارای یک معادلهٔ شدت بار $q_{(x)}$ باشد و از بازهٔ بسته $[0, L]$ که در آن L، طول تحت بارگذاری است انتخاب می‌شود.

۴- در نقاطی از تیر که تحت بارگذاری نقطه‌ای است، شیب منحنی نیروی برشی ۹۰ درجه است و از جهت نیروی نقطه‌ای به سمت

بالا باشد یک صعود و اگر به سمت پایین باشد یک نزول به اندازهٔ نیروی نقطه‌ای خواهیم داشت.

- با نوشتن معادلهٔ تعادل گشتاور برای اِلمان جزیی طولی dx داریم:

$$\sum M = 0$$

$$-M + (M + dM) - V(dx) - \frac{q(dx)^2}{2} = 0$$

از آنجا که $\frac{q(dx)^2}{2}$ یک مقدار بسیار کوچک و در حد صفر است لذا در معادله حذف می‌شود و بنابراین نتیجهٔ معادلهٔ بالا به صورت زیر است.

$$dM = V dx \Rightarrow \frac{dM}{dx} = V \quad (III) \qquad M = \int_{x_1}^{x_2} V(dx) + C_2 \quad (IV)$$

از روابط بالا می‌توان به نتایج زیر رسید:

۱- شیب منحنی ممان خمشی در هر نقطه از تیر تحت بارگذاری $q(x)$، برابر با نیروی برشی در آن نقطه از تیر است. (معادلهٔ III)

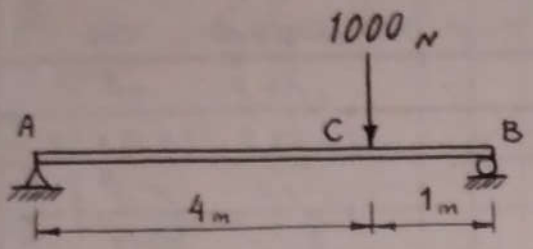
۲- ممان خمشی در هر نقطه از تیر تحت بارگذاری $q(x)$، برابر با مساحت سطح زیر منحنی نیروی برشی تا آن نقطه است. (معادلهٔ IV)، ممان‌های نقطه‌ای ساعتگرد با مقادیر مثبت و پادساعتگرد با مقادیر منفی به این مساحت اضافه می‌شوند. مساحت‌ها با در نظر گرفتن علامت مثبت یا منفی‌شان جمع می‌شوند.

۳- x هایی که در معادلات دیفرانسیل می‌آید، فقط مربوط به بازه‌ای است که دارای یک معادلهٔ شدت بار $q(x)$ باشد و از بازهٔ بسته $[0, L]$ که در آن L طول تحت بارگذاری $q(x)$ است، انتخاب می‌شود.

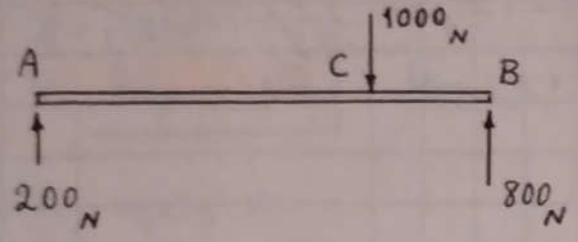
۴- در نقاطی از تیر که تحت بارگذاری نقطه‌ای است (ممان نقطه‌ای)، شیب منحنی ممان خمشی ۹۰ درجه است که اگر ممان نقطه‌ای ساعتگرد باشد یک صعود و اگر پادساعتگرد باشد یک نزول خواهیم داشت.

* لازم به توضیح است که تمامی نیروهای تکیه‌گاهی باید قبل از استفاده از روش انتگرالی محاسبه شوند.

مثال (۱-۲): دیاگرام نیروی برشی و ممان خمشی تیر ساده شکل مقابل را به روش انگترالی محاسبه و رسم کنید.



حل: محاسبهٔ نیروهای تکیه گاهی



$$R_A = \frac{1}{5}(1000) = 200\ N$$

$$R_B = \frac{4}{5}(1000) = 800\ N$$

بنابراین تیر فقط تحت بارگذاری نقطه‌ای است و در بین نقاط A تا C و C تا B شدت بار $q(x)$ صفر است

رسم منحنی نیروی برشی:

$\therefore\ 0 \leq x \leq 4$

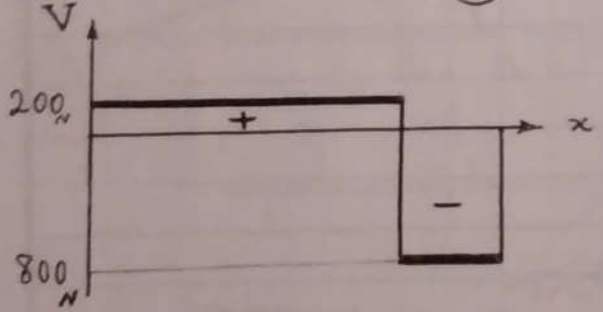
$$q = 0 \Rightarrow \frac{dV}{dx} = q = 0 \Rightarrow dV = 0 \Rightarrow \underline{V_1 = cte = 200\ (N)}$$

(مساحت سطح منحنی شدت بار از نقطه A تا نقطه C صفر است و فقط یک نیروی نقطه‌ای 200 به سمت بالا وجود دارد)

$\therefore\ 0 \leq x \leq 1$

$$q = 0 \Rightarrow \frac{dV}{dx} = q = 0 \Rightarrow dV = 0 \Rightarrow \underline{V_2 = cte = 200 - 1000 = -800\ (N)}$$

(مساحت سطح زیر منحنی شدت بار از نقطه C تا نقطه B صفر است و فقط دو نیروی نقطه‌ای 200+ و 1000- وجود دارد)



- لذا نمودار نیروی برشی تیر بالا به شکل زیر خواهد بود.

ملاحظه می‌شود که در نقاط A، C، B به ترتیب به اندازه‌های 200 N، 1000 N، 800 N، صعود، نزول و صعود وجود دارد.

رسم منحنی ممان خمشی:

$\therefore\ 0 \leq x \leq 4$

شیب منحنی ممان خمشی در فاصله نقاط A تا C مقداری ثابت و مثبت است لذا منحنی ممان خمشی در این فاصله یک خط راست می‌باشد.

$$V = 200\ N \Rightarrow \frac{dM}{dx} = V = 200$$

$$M = \left(\int 200\, dx\right) + C_1 = 200x + C_1$$

- مقدار ثابت C_1 با توجه به شکل بارگذاری تیر، در نقطه $\begin{cases} x=0 \\ M=0 \end{cases}$ صفر می‌باشد. (در محل تکیه‌گاه‌های لولایی یا غلتکی اگر همان نقطه‌ای از خارج اعمال نشود، M در آن نقاط صفر می‌باشد)

$(x=0 \Rightarrow M=0)$

$$\Rightarrow M_1 = 200x + C_1$$
$$0 = 200(0) + C_1 \Rightarrow C_1 = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{M_1 = 200x}$$

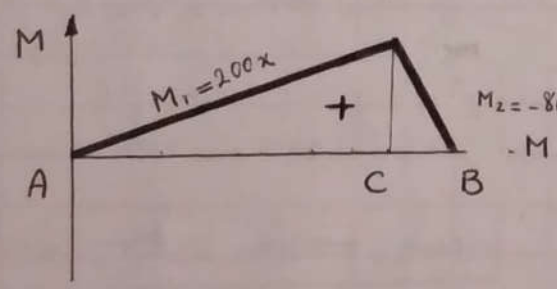
$$\therefore \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

$$V = -800\ N \Rightarrow \frac{dM}{dx} = V = -800$$

شیب منحنی ممان خمشی در فاصله C تا B مقداری ثابت و منفی است، لذا منحنی ممان خمشی در این فاصله یک خط راست است.

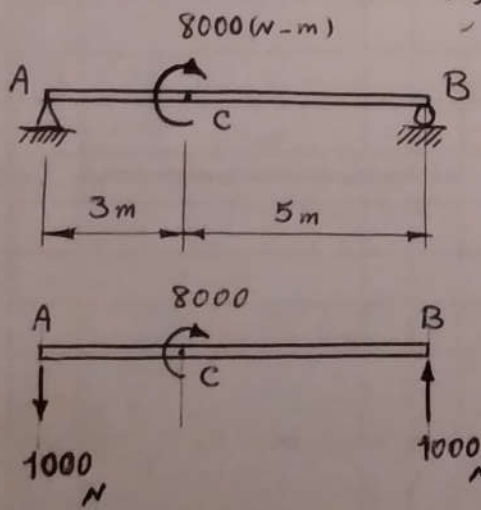
$$M_2 = \int (-800\, dx) + C_2$$
$$M_2 = -800x + C_2$$
$$x = 0 \Rightarrow M_2 = 800$$
$$\Rightarrow \boxed{M_2 = -800x + 800}$$

- در نقطه $x = 0$ از بازه $[1, 0]$ در منطقه دوم تیر، مقدار M از معادله $M = 200x$، معادله ممان خمشی برای منطقه اول تیر، می‌توان به دست آورد، که همان مساحت سطح زیر منحنی نیروی برشی از نقطه ابتدای تیر تا نقطه C می‌باشد که به دلیل عدم وجود ممان در نقطه‌ای اعمالی از خارج ممان مقدار $M = 200 \times 4 = 800$ (N-m) خواهد بود.



بنابراین منحنی ممان خمشی برای مثال مذکور به صورت زیر است.

مثال (۲-۲): دیاگرام نیروی برشی و ممان خمشی را برای شکل مقابل رسم کنید.



حل:

$$R_A = \frac{8000}{8} = 1000\ N = R_B$$

در فاصله A تا C و نیز B تا C بار گسترده‌ای وجود ندارد لذا $q = 0$.

$0 \leq x \leq 3$

$\frac{dV}{dx} = q = 0 \Rightarrow \boxed{V_1 = cte = -1000\,(N)}$

مساحت سطح زیر منحنی شدت بار در فاصله A تا C، صفر است، بنابراین نیروی برشی ثابت و همان مقدار نیروی تکیه‌گاهی در A است.

$\frac{dM}{dx} = V = -1000 \Rightarrow M = -1000x + C_1$ $\begin{cases} x = 0 \\ M = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 = -1000(0) + C_1 \Rightarrow C_1 = 0$

$\Rightarrow \boxed{M_1 = -1000x}$

- در فاصله A تا C، مقدار نیروی برشی ثابت و مساوی $-1000\ N$ بوده و همان خمشی یک خط راست با شیب -1000 که دارای مقدار اولیه صفر و مقدار نهایی $M = -1000(3) = -3000\ (N-m)$ می‌باشد.

$0 \leq x \leq 5$

$\frac{dV}{dx} = q = 0 \Rightarrow \boxed{V_2 = cte = -1000\,(N)}$

- چون در ناحیه دوم تیر (بعد از نقطه C) هیچ بار گسترده‌ای وجود ندارد لذا مقدار نیروی برشی در این ناحیه ثابت است و همان جمع نیروهای نقطه‌ای از A تا C می‌باشد.

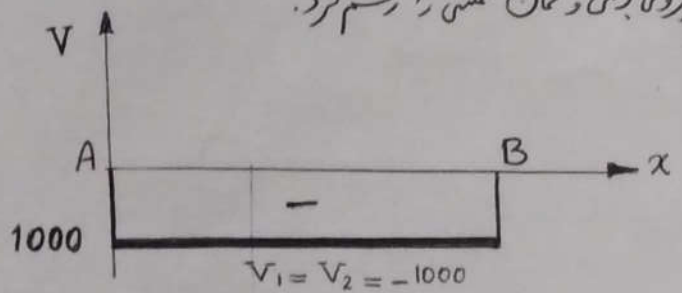
$\frac{dM}{dx} = V = -1000\,(N) \Rightarrow M_2 = -1000x + C_2$ $\begin{cases} x = 0 \\ M = -1000(3) + 8000 = 5000\ (N-m) \end{cases}$

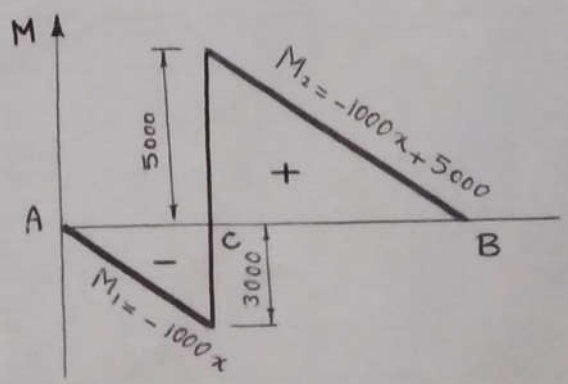
مساحت سطح زیر منحنی نیروی برشی از A تا C به اضافه مقدار نقطه‌ای

$\Rightarrow 5000 = -1000(0) + C_2 \Rightarrow \boxed{C_2 = 5000}$

$\Rightarrow \boxed{M_2 = -1000x + 5000}$

حال با توجه به معادلات بدست آمده در بالا می‌توان دیاگرام نیروی برشی و همان خمشی را رسم کرد.

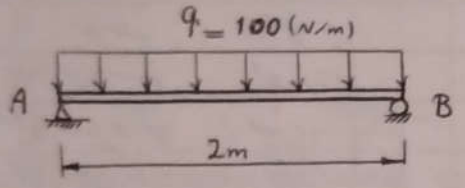




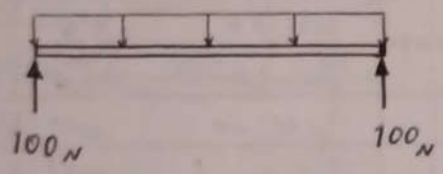
- باکمی دقت در دیاگرام ها، متوجه می‌شویم که همان نقطه‌ای که هیچ تأثیری بر روی برش ندارد، همچنین در نقاط A و B که نیروی نقطه‌ای به ترتیب 1000_N - و 1000_N + اعمال شده‌اند یک تغییر و یک صعود به اندازه 1000 داریم.

همچنین در دیاگرام تمام خمش شیب منفی (1000-) در نقاط A و C و نیز B و C یکسان بوده و در نقطه C هم که همان نقطه‌ای است که گشتاور به اندازه 8000_{N-m} (N-m) اعمال شده، یک صعود به اندازه 8000_{N-m} دیده می‌شود.

مثال ۳-۲ : دیاگرام نیروی برشی و همان خمش تیر تکیه‌گاهی ساده‌ای که تحت بار گسترده شکل مقابل را دارد رسم کرده و مقدار نیروی برشی و همان خمش را در نقطه $x = 1.5_m$ از انتهای A بدست آورید.



حل : چون طول تیر فقط یک معادله شدت بار حاکم است لذا محدوده انتگرال‌گیری به صورت $0 \leq x \leq 2$ تعریف می‌شود. $0 \leqslant x \leqslant 2$



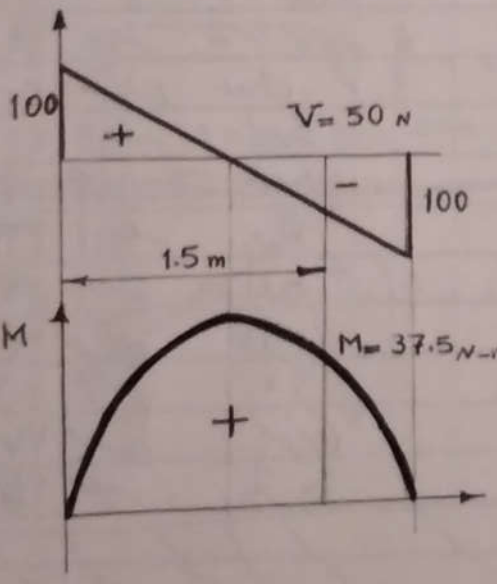
$$\frac{dV}{dx} = q = -100 \quad (N/m)$$

$$\Rightarrow V = -100x + C_1$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ V = 100 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 100$$

$$\Rightarrow \underline{V = -100x + 100}$$

- نیروی تکیه‌گاهی در نقطه A به عنوان مقدار اولیه برای معادله $V = -100x + C_1$ می‌باشد.



$$\frac{dM}{dx} = V = -100x + 100$$

$$\Rightarrow M = -50x^2 + 100x + C_2$$

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \\ M = 0 \end{cases}$$

- در نقطه A تکیه‌گاه از نوع لولایی است و هیچ ممان خارجی اعمال نمی‌شود و همان، صفر است.

$$\Rightarrow \underline{M = -50x^2 + 100x}$$

$$x = 1.5\ m \Rightarrow \begin{cases} V = -100(1.5) + 100 = -50 \ (N) \\ M = -50(1.5)^2 + 100(1.5) = 37.5 \ (N-m) \end{cases}$$

مقدار $V = -50$ در نقطه $x = 1.5_m$ را همچنین می‌توان از مساحت سطح زیر منحنی شدت بار در این فاصله به اضافه نیروی نقطه‌ای A محاسبه کرد.

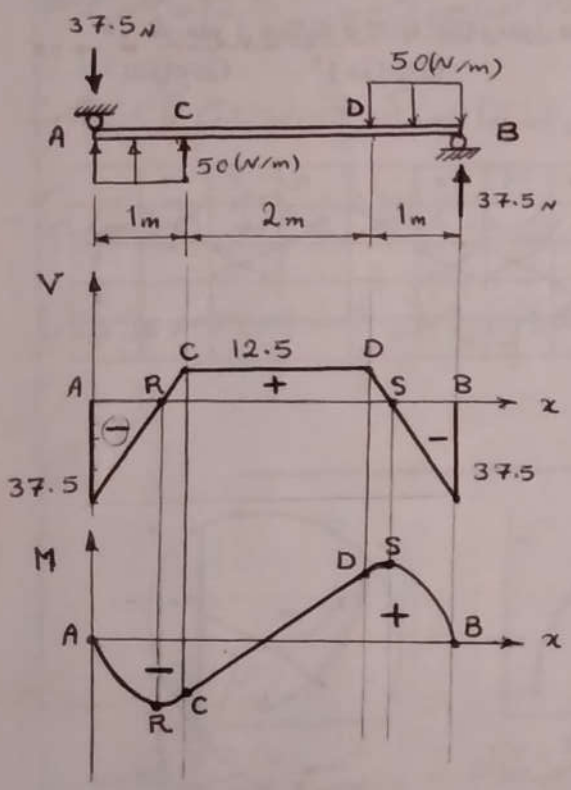
- تا نقطه $x = 1.5_m$ به دست آورده به صورت زیر است:

$$\left.\begin{array}{l} \text{مساحت سطح زیر منحنی شدت بار از نقطه A تا } x=1.5_m = -100\,(1.5) = -150 \\ \text{نیروی برشی نقطه ای از A تا } x=1.5_m = +100 \end{array}\right\} \Rightarrow V_{(x=1.5)} = -150 + 100 = -50_N$$

- همچنین مقدار M در نقطه $x = 1.5_m$ را از مجموع مساحت سطح زیر منحنی نیروی برشی به اضافه ممان لحاظ شده تا آن نقطه، می توان به دست آورد.

$$M = \frac{100(1)}{2} - \frac{50x(0.5)}{2} = 37.5\ (N-m)$$

مثال (۴-۲): دیاگرام نیروی برشی و ممان خمشی را بدون نوشتن معادلات دیفرانسیل و انتگرال بطور دقیق رسم کرده و ماکزیمم ممان را بیابید.



حل: با استفاده از معادلات تعادل مقادیر نیروهای تکیه گاهی در نقاط A و B باهم برابر و مساوی N 37.5 بدست می آید.

- در نقطه A قبل از شروع اعمال بارگسترده، کنیواخت نیروی نقطه ای رو به پایین به مقدار N 37.5 اعمال می شود که یک ترول به همین اندازه در محل وجود خواهد داشت.

- از نقطه A به بعد منحنی نیروی برشی به صورت یک خط راست با شیب 50+ که همان شدت بارگسترده یکنواخت از نقطه A تا نقطه C است، خواهد بود که از مقدار (N) 37.5- در نقطه A شروع و به مقدار $+12.5_{(N)}$ در نقطه C خواهد رسید. (12.5+، از حاصل جمع بار نقطه ای 37.5- و مساحت سطح زیر منحنی شدت بار از A تا C یعنی 50+ به دست می آید)

- از نقطه C تا نقطه D، مقدار شدت بار، صفر است بنابراین نیروی برشی با همان مقدار اولیه 12.5_N به صورت یک خط راست موازی محور افقی خواهد بود.

- از نقطه D تا B، با یک شیب منفی با مقدار 50 که همان شدت بارگسترده یکنواخت از D تا B است، به صورت خطی از مقدار 12.5+ به مقدار 37.5- ترول خواهد کرد.

- در نقطه B با اعمال نیروی نقطه ای 37.5+ مقدار 37.5- به صفر خواهد رسید.

- و اما منحنی ممان خمشی : از نقطهٔ A تا نقطهٔ C ، نیروی برشی دارای دو علامت است . از نقطهٔ A تا نقطهٔ R نیروی برشی که همان شیب منحنی ممان خمشی است ، دارای علامت منفی است و قدر مطلق آن (اندازهٔ نیروی برشی) حالت نزولی دارد ، بنابراین جهت تقعر منفی درجه دوم ممان خمشی به سمت بالا و رفته رفته از مقدار شیب منفی کاسته خواهد شد .

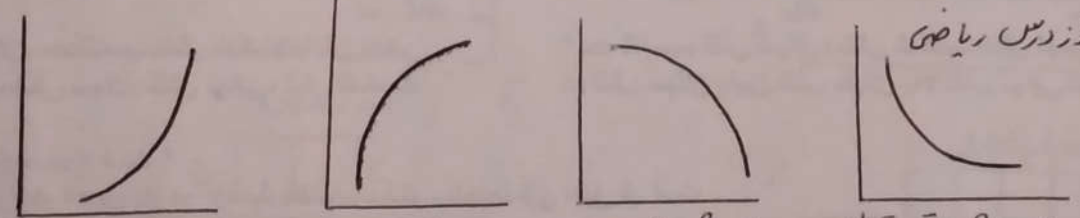
از نقطهٔ R تا نقطهٔ C ، نیروی برشی که همان شیب منحنی ممان خمشی است ، دارای علامت مثبت است و قدر مطلق آن (اندازهٔ نیروی برشی) حالت صعودی دارد ، بنابراین جهت تقعر منفی درجه دوم ممان خمشی به سمت بالا و رفته رفته به مقدار شیب منفی افزوده خواهد شد .

از نقطهٔ C تا نقطهٔ D مقدار نیروی برشی ثابت و مثبت ، لذا منحنی ممان خمشی دارای یک شیب ثابت و مثبت و به صورت خط راست می‌باشد که از مقدار 10.417- در زیر محور افقی تا مقدار 10.417+ در بالای محور افقی با شیب 12.5+ صعود خواهد کرد .

از نقطهٔ D تا S ، مقدار نیروی برشی مثبت ولی قدر مطلق آن رو به کاهش دارد لذا جهت تقعر منفی درجه دوم ممان خمشی به سمت پایین بوده و رفته رفته از شیب منفی کاسته می‌شود تا در نقطهٔ S به مقدار صفر می‌رسد . از نقطهٔ S تا نقطهٔ B ، مقدار نیروی برشی ، مثبت و لی قدر مطلق آن رو به افزایش دارد ، لذا جهت تقعر منفی درجه دوم ممان خمشی به سمت پایین بوده و رفته رفته به شیب منفی اضافه خواهد شد .

---

* یادآوری از درس ریاضی



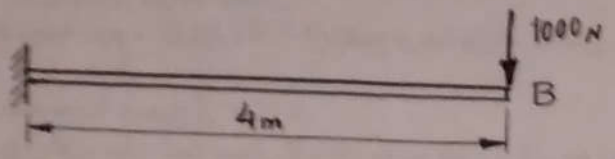
منفی با شیب مثبت و صعودی (شیب متغیر)

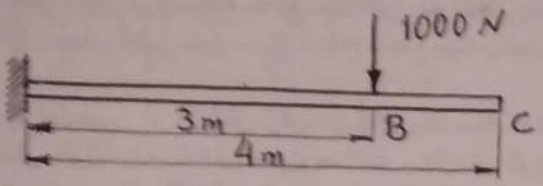
مثبت با شیب مثبت و نزولی (شیب متغیر)

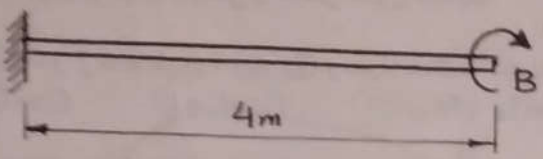
منفی با شیب مثبت و صعودی (شیب متغیر)

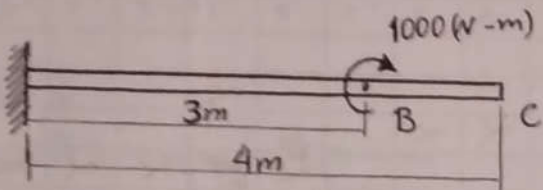
مثبت با شیب مثبت و نزولی (شیب متغیر)

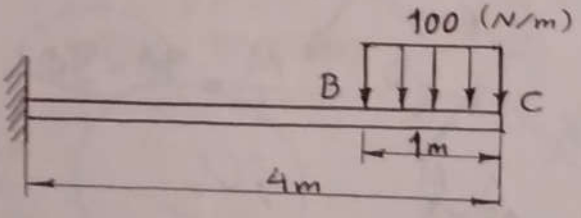
مسایل مربوط به مبحث رسم دیاگرام نیروی برشی و ممان خمشی

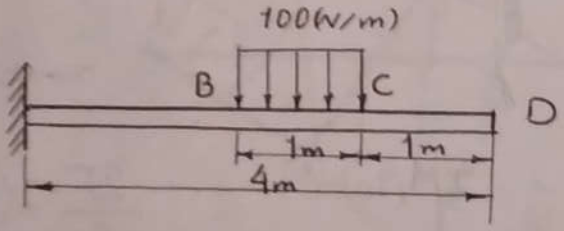
(۱)


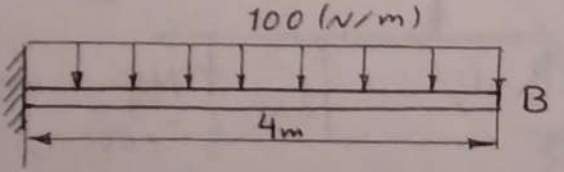
(۲)


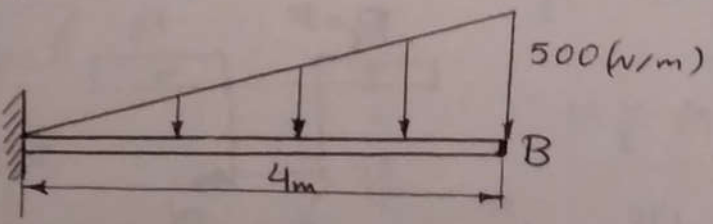
(۳)


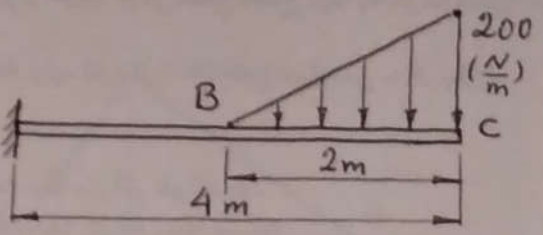
(۴)


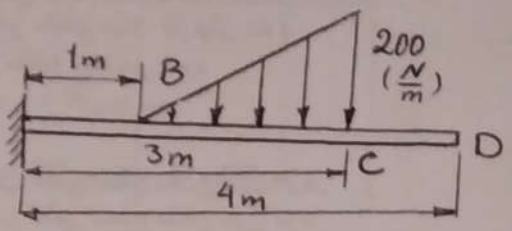
(۵)


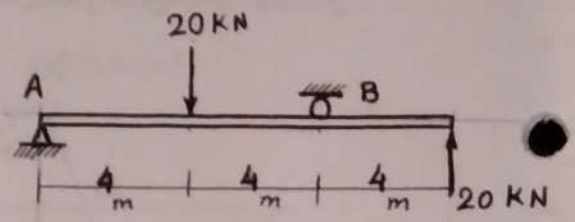
(۶)


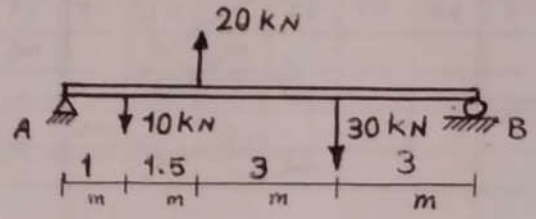
(۷)


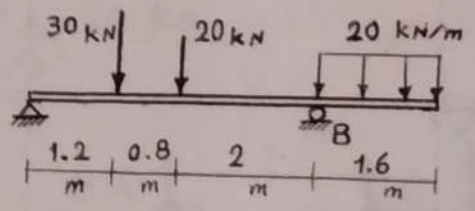
(۸)


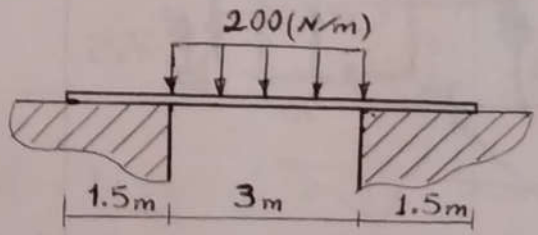
(۹)


(۱۰)


(۱۱)


(۱۲)


(۱۳)


(۱۴)


(۱۵)