Subject:
Year: Month: Day: ( )

آنالیز ابعادی و تشابه:

در علم مکانیک سیالات اغلب پدیده ها به متغیرهای زیادی وابسته اند و تجزیه و تحلیل آنها با استفاده از اندازه نمونه اصلی و این تعداد متغیرها کار پرهزینه و وقت گیری است این مشکل با استفاده از آنالیز ابعادی حل شده است بدین ترتیب که به جای استفاده از تک تک متغیرها اعداد بدون بُعد مربوطه را به دست آورده و از آن ها استفاده می کنیم در نتیجه تعداد متغیرها کاهش می یابد از طرف دیگر با استفاده از قوانین تشابه حاصل از آنالیز ابعادی داده های مربوط به یک مدل کوچک را می توان به داده های صحیح یک نمونه واقعی تبدیل نمود.

ابعاد اصلی: طول L - زمان T یا t - جرم M - دما θ

طول: L	چگالی (ρ): ML^{-3}	لزجت سینماتیک (ν): L^2t^{-1}
مساحت: L^2	وزن مخصوص (γ): $ML^{-2}t^{-2}$	کشش سطحی (σ): Mt^{-2}
حجم: L^3	فشار (p یا Π): $ML^{-1}t^{-2}$	سرعت زاویه ای (ω): t^{-1}
شتاب: Lt^{-2}	لزجت: $ML^{-1}t^{-1}$	گشتاور (T): ML^2t^{-2}
سرعت: Lt^{-1}		توان (P): ML^2t^{-1}
دبی حجمی: L^3t^{-1}		

Nafis

Subject:
Year: Month: Day: ( )

تئوری پی - باکینگهام:

هرگاه در یک پدیده فیزیکی n متغیر وجود داشته باشد که دارای m بعد باشند تعداد اعداد بی بعد که می توان به دست آورد برابر $n-m$ خواهد بود.

ex) اعداد بی بعد شامل m و ρ و ν و A را به دست آورید.

L, T, M

$A \downarrow L^2$, $\nu \downarrow Lt^{-1}$, $\rho \downarrow ML^{-3}$, $m \downarrow Mt^{-1}$

تعداد متغیر = 4

تعداد بعد = 3

$4-3=1=n-m$

مراحل استفاده از قضیه پی - باکینگهام:

ابتدا تعداد متغیرها و تعداد ابعاد را مشخص خواهیم کرد.

هرگاه m بعد داشته باشیم به همان تعداد از متغیرهای موجود را به عنوان متغیر تکراری انتخاب می کنیم این متغیرها باید شامل کلیه ابعاد باشند دقت شود که از انتخاب دو متغیر که طراح بعد یکسانی هستند و تنها اختلافشان توان بعد است ترجیحاً خودداری شود. ما می دانیم به تعداد $n-m$ عدد Π خواهیم داشت لذا در هر مرحله در کنار m بعد تکراری یک بعد جدید قرار داده به اضافه متغیر توان های a, b, c, d, ... را ثابت خواهیم داد و کاری خواهیم کرد که برای هر بعد مقادیر بهایی بدهد.

Subject
Year Month Day ( )

$\Pi_1 = A \quad V \quad \rho \quad \dot{m}$

$(L^2)^a \quad (Lt^{-1})^b \quad (ML^{-3})^c \quad (Mt^{-1})^d$

$L: 2a + b - 3c = 0$

$t: -b - d = 0 \Rightarrow b = -d$

$M: c + d = 0 \Rightarrow c = -d$

$\Big\} \; b = c$

$2a + b - 3b = 0 \Rightarrow 2a - 2b = 0 \Rightarrow a = b = c = -d = 1$

$\Pi = A \; V \; \rho \; \dot{m}^{-1} \Rightarrow \dot{m} = \rho V A \Rightarrow \frac{\dot{m}}{\dot{m}} = \frac{\rho V A}{\dot{m}} = \boxed{\rho V A \dot{m}^{-1}}$

ex: حالا بیایید رابطه دبیت آورده که شامل متغیرهای تنش، لزجت، سرعت و طول باشد؟

نکته: از این به بعد همواره توان متغیر غیر تکراری را در صورت Π برابر 1 قرار دهید.

$\pi = \tau \quad L \quad \mu \quad \tau$

$(Lt^{-1})^a \quad (L)^b \quad (ML^{-1}t^{-1})^c \quad (ML^{-1}t^{-2})^{d=1}$

$L: a + b - c - 1 = 0 \Rightarrow -1 + b + 1 - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{b = 1}$

$t: -a - c - 2 = 0 \Rightarrow -a + 1 - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{a = -1}$

$M: c + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{c = -1}$

$\Pi = V \quad L \quad \mu \quad \tau = V^{-1} \quad L^1 \quad \mu^{-1} \quad \tau^1 \Rightarrow \boxed{\tau = \mu \frac{V}{L}}$

Subject:
Year Month: Day: ( )

ex: مقدار دبی عبوری سیال از یک روزنه q به ضخامت d و قطر روزنه d و اختلاف فشار ΔP و چگالی سیال ρ بستگی دارد. اگر پارامتر غیر تکراری را دبی در نظر بگیریم ابتدا عدد بی بعد مربوطه را به دست آورده سپس رابطه‌ای برای q پیشنهاد دهید.

$Q, \rho, d, \Delta P$

تکراری

$\Pi = \rho, d, \Delta P, Q$

$(ML^{-3})^a \quad (L)^b \quad (ML^{-1}t^{-2})^c \quad (L^3t^{-1})^{d=1}$

$L: -3a + b - c + 3 = 0 \Rightarrow -\frac{3}{2} + b + \frac{1}{2} + 3 = 0 \Rightarrow \boxed{b = -2}$

$M: a + c = 0 \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}}$

$t: -2c - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{c = -\frac{1}{2}}$

$\Pi = \rho\, d\, \Delta P\, Q \Rightarrow \rho^{1/2} d^{-2} \Delta P^{-1/2} Q \Rightarrow \boxed{Q = d^2 \sqrt{\frac{\Delta P}{\rho}}}$

Subject:
Year: Month: Day: ( )

نیروهای مهم در مکانیک سیالات:

1- نیروی فشار:

$$F_p = \Delta P \times A = \Delta P L^2$$

$$\text{فشار} = \frac{\text{نیرو}}{\text{سطح}} \qquad \text{نیرو} = \text{فشار} \times \text{سطح}$$

2- نیروی اینرسی:

$$F_I = m v \frac{dv}{ds} \longrightarrow \text{مسافت}$$

$$\rho = \frac{m}{v} \Rightarrow m = \rho v = \rho L^3 \qquad F_I = \rho L^3 v \frac{v}{L} = \rho L^2 v^2$$

3- نیروی لزجت:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \Rightarrow F_\mu = \mu A \frac{du}{dy} = \mu L^2 \frac{v}{L} = \mu L v$$

4- نیروی ثقل:

$$F_g = mg = \rho L^3 g$$

5- نیروی تراکم پذیری:

$$F_B = E_v A = \rho \frac{dp}{d\rho} L^2 = \rho c^2 L^2$$

ضریب تراکم پذیری $c^2 = \frac{dp}{d\rho}$

6- نیروی کشش سطح:

$$F_\sigma = \sigma L \longrightarrow \text{ضریب کشش سطحی}$$

7- نیروی سانتریفوژ:

$$F_W = mr\omega^2 = \rho L^3 L \omega^2 = \rho L^4 \omega^2$$

Subject:
Year: Month: Day: ( )

عدد رینولدز = نیروی اینرسی / نیروی لزجت : $Re = \frac{\rho L^2 v^2}{\mu v L} = \frac{\rho L v}{\mu}$

عدد فرود = نیروی اینرسی / نیروی وزن $= \frac{\rho L^2 v^2}{\rho L^3 g} = \frac{v}{Lg} \Rightarrow Fr = \sqrt{\frac{v}{Lg}}$

کاربرد عدد فرود: طراحی کانال های رو باز و طراحی کشتی

عدد اویلر = نیروی فشاری / نیروی اینرسی $= Eu = \frac{\Delta P L^2}{\rho L^2 v^2} = \frac{\Delta P}{\rho v^2}$

کاربرد عدد اویلر: در جاهایی که افت فشار کاربرد دارد استفاده می شود

عدد ماخ = نیروی اینرسی / نیروی تراکم پذیری $= M = \frac{\rho L^2 v^2}{\rho c^2 L^2} = \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow M = \frac{v}{c}$

سرعت صوت هوا ← استفاده شده برای سرعت هواپیما

$340 m/s = 1200 km/h$ ←

عدد وبر = نیروی اینرسی / نیروی کشش سطحی $= \frac{\rho L^2 v^2}{\sigma L} = WB = \frac{\rho L v^2}{\sigma}$

کاربرد عدد وبر: بررسی جریان لوله

عدد استروهال = نیروی ناشی از نوسان / نیروی اینرسی $= St = \frac{\rho L^4 w^2}{\rho L^2 v^2} = \frac{L^2 w^2}{v^2} \Rightarrow St = \frac{Lw}{v}$

کاربرد عدد استروهال: هر چیزی که به صورت متناوب باعث بشه با زیاد شدن عدد استروهال استفاده کنه

مانند استفاده از امواج دریا که تولید برق می کند

Subject:
Year: Month: Day: ( )

انواع تشابه:

1- تشابه هندسی: یعنی ابعاد نمونه با ابعاد جسم اصلی متناسب باشد.

2- تشابه سینماتیکی: ابعاد نمونه با ابعاد جسم واقعی علاوه بر ابعاد سرعت نمونه و جسم اصلی نیز متناسب باشد تا تشابه سینماتیکی خواهیم داشت.

3- تشابه دینامیکی: علاوه بر هندسه و سرعت باید نیروهای وارد بر نمونه و جسم اصلی برابر باشد.

نکاتی درباره استفاده از اعداد بدون بعد:

1- برای جریان داخل کانال های لوله عدد رینولدز مهم است.

2- در مباحثی که لایه مرزی مطرح باشد عدد رینولدز تعیین کننده خواهد بود.

3- برای جریان هوا در اکثر موارد عدد ماخ مهم است.

4- هرگاه جریان دارای یک سطح آزاد باشد عدد وبر موثر خواهد بود. اما اگر اطراف جسم بلوک باشد عدد فرود تعیین کننده خواهد بود.

5- هرگاه لفت نیرو به گونه ای باشد که به تغییر منحنی شود (کاویتاسیون) عدد اویلر موثر است.

6- در جریان های رو باز تغییر در دهانه ها و کانال های رو باز عدد فرود مهم خواهد بود.

7- از عدد وبر جهت تحلیل کشش سطحی امواج و سرریز شدن سیالات استفاده می شود.

8- برای جریان های نایایا (ناپایا) عدد استروهال تعیین کننده خواهد بود.

9- تاثیر مرزی نیروهای لزجت طبیعی موثر خواهد بود.

Subject:
Year Month Day ( )

جریان های داخلی یا کانال ها و لزج :

- در جریان آرام حرکت هر ذره از سیال در راستا مسیر مشخص است لایه ای
- سیال بدون آنکه گردابه ای ایجاد شود به آرامی بر روی هم می لغزد $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$ تنش برشی
- در جریان درهم مسیر حرکت ذرات سیال نامنظم بوده و تشکیل گردابه می دهند

$\tau_{turbo} = \eta \frac{\partial u}{\partial y}$ نسبت به خط جریان در همه مسیرها و زوایا حرکت می کند .

* تنش برشی و تلفات در جریان درهم بیشتر از جریان آرام خواهد بود .

* η لزجت گردابه ای نامیده می شود که نشان دهنده شدت انتقال ممنتوم از نقاط پرسرعت به نقاط کم سرعت است .

$\tau_{کل} = \tau_{lam} + \tau_{turbo} = (\mu + \eta) \frac{\partial u}{\partial y}$

$Re = \frac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{لزجت}} = \frac{\rho u d}{\mu}$

Laminar $Re < 2300$ (2000)

Turbo $Re > 2300$ (4000)

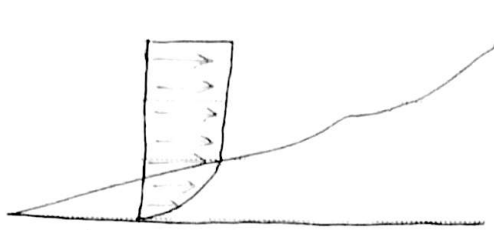
$\rightarrow 2300 < Re < 4000$ حالت گذار (Trans)

جریان کاملا توسعه یافته :

مطابق شکل زیر جریان در ابتدا ورودی یک لوله سرعت یکنواختی دارد اما رفته رفته در طول لوله به دلیل اصل عدم لغزش سرعت در تماس با دیواره کند می شود تاثیرات دیواره هم روی سیال رفته رفته بیشتر شده و به یک حالت پایدار می رسد پس از پایدار شدن خواهیم گفت منطقه

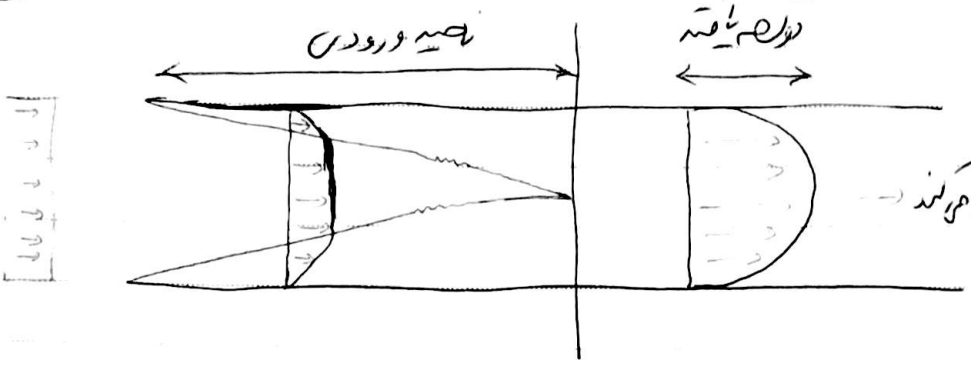
Subject:
Year Month: Day: ( )

کاملاً توسعه یافته فرض شده است.



لایه ی مرزی

← اثرات دیواره



← تمام جریان به دیواره برخورد می کند

خواص ناحیه کاملاً توسعه یافته:

1- در این ناحیه توزیع سرعت یک بعدی بوده و مولفه شعاعی آن صفر است.

2- گرادیان سرعت محوری صفر خواهد بود $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$

3- ضریب اصطکاک و افت فشار در لوله ثابت خواهد بود.

در ابتدا باید عدد رینولدز را مشخص کرد $\begin{cases} lam: \frac{L}{d} = 0.06\,Re \\ turbo: \frac{L}{d} = 4.4\,Re^{1/6} \end{cases}$

از طریق فرمول $Re = \frac{\rho u d}{\mu}$

افت فشار در جریان آرام:

* در ابتدا باید عدد رینولدز را مشخص کرد چرا که رابطه هاگن پوازیه برای رابطه lam استفاده می شود

هاگن پوازیه (lam) $\Delta P = \frac{128\,\mu L Q}{\pi d^4}$

$Q = Au \qquad \dot{m} = \rho u A$

Subject
Year Month Day ( )

تعیین افت فشار اصطکاکی در لوله:

این رابطه برای جریان سیال کاملاً توسعه یافته و پایدار و تقریباً ثابت مورد استفاده قرار می‌گیرد.

ضریب اصطکاک f : (turbo و lam) در سه حالت

$$h_f = f \frac{L}{d} \frac{V^2}{2g} \qquad f = \text{lam} : f = \frac{64}{Re}$$

ex: جریان یک سیال لزج داخل لوله با عدد رینولدز 1500 مفروض است. اگر طول لوله 20m و قطر آن 5 cm باشد و لزجت سینماتیکی 2×10^{-5} باشد، افت فشار لوله چقدر است؟

$$Re = \frac{\rho u d}{\mu} = \frac{ud}{\nu} \Rightarrow 1500 = \frac{u \times 0.05}{2\times10^{-5}} \Rightarrow \boxed{u = 0.6 \text{ m/s}}$$

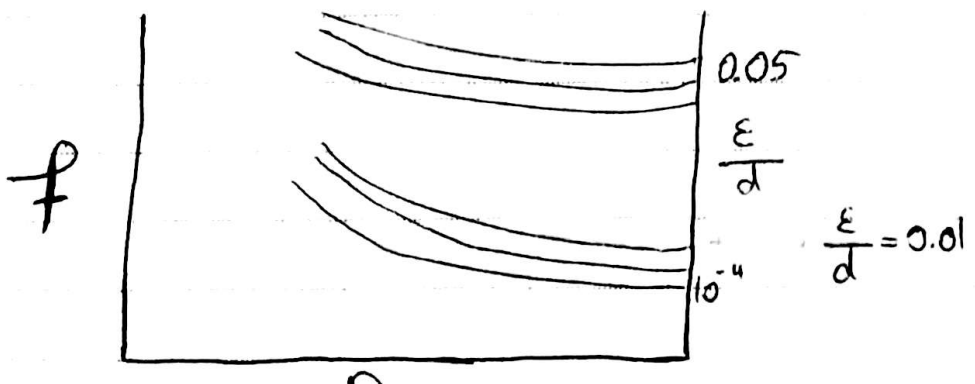
$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \qquad f = \frac{64}{Re} = \frac{64}{1500} = 0.042$$

$$h_f = 0.042 \times \frac{20}{0.05} \frac{(0.6)^2}{2\times9.8} = \boxed{0.313}$$

مقدار عددی f :

f { lam : $f = \frac{64}{Re}$

turbo : $\frac{1}{\sqrt{f}} = 0.869 \ln\left[\frac{\frac{\varepsilon}{d}}{3.7} + \frac{2.523}{Re\sqrt{f}}\right]$ ← زبری نسبی — کولبرک



$\frac{\varepsilon}{d} = 0.01$

(دیاگرام مودی)

Nafis

Subject
Year Month Day ( )

معادله برنولی اصلاح شده:

$$\frac{P_1}{\rho g}+\frac{V_1^2}{2g}+Z_1+h_p-h_c-h_f=\frac{P_2}{\rho g}+\frac{V_2^2}{2g}+Z_2$$

h_p: هد پمپ h_c: کمپرسور h_f: افت اصطکاکی

$$h_f=f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

مثال ۲۵

ex: مطابق شکل زیر آب از نقطه 1 به 2 در حال انتقال است اگر ارتفاع نقطه 1 از سطح دریا 2000m بوده و ارتفاع نقطه 2، 2100 m باشد و فرض کنیم آب در نقطه 1 از یک دریاچه بزرگ پمپاژ می‌شود و فشار مطلوب در نقطه 2 برابر 100 kpa است اگر سرعت مطلوب در محل خروجی 20 m/s باشد و با فرض اینکه طول لوله 500m و قطر آن 10cm باشد و زبری نسبی 0.0002 باشد با فرض $\rho=1000$ و $\mu=0.001$ توان پمپ مورد نیاز را محاسبه کنید.

$Z_2=2100m$

$P_2=200kpa$

$V_2=20m/s$

$V_1=0$

در دریاچه بزرگ به دلیل وسعت زیاد هرچند پمپ شود باز هم سطح ثابت خواهد بود.

$$h_f=f\frac{L}{D}\cdot\frac{V^2}{2g}=0.016\,\frac{500}{0.1}\,\frac{20^2}{2\times10}=1600m$$

$$Re=\frac{\rho u d}{\mu}=\frac{1000\times20\times0.1}{0.001}=2\times10^6$$

از نمودار مودی $\longrightarrow f=0.016$

$$\frac{100000}{1000\times10}+0+2000+h_p-1600=\frac{200000}{1000\times10}+\frac{20^2}{2\times10}+2100$$

$$\boxed{h_p=1730m}$$

Subject:
Year: Month: Day: ( )

نیروی اصطکاک وارد بر لوله:

$$\tau_w = \frac{1}{8} f \rho V^2$$

$$= \tau_w = \frac{1}{2} C_f \rho V^2$$

$\frac{f}{4} = C_f$ ضریب فانینگ

مساحت داخلی لوله = πDL
محیط دایره

$N = \frac{1}{8} f \rho V^2 \pi DL$

N = نیروی اصطکاک

ex: در مثال قبل نیروی اصطکاک وارده بر دیواره داخلی لوله را به دست آورید.

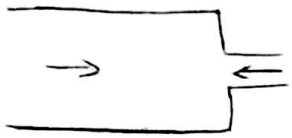
$$N = \frac{1}{8} 0.016 \times 1000 \times 20^2 \times \pi \times 0.1 \times 500 = 125600N = 125.6kN$$

Subject
Year Month Day ( )

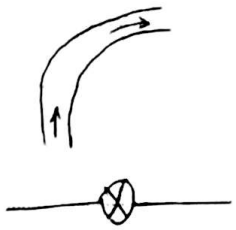
افت موضعی :

ورود یا خروج لوله

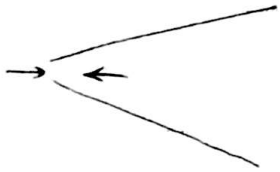
انقباط یا انبساط ناگهانی



زانویی و شیر



انقباط و انبساط تدریجی



$$h_f = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 - h_f + h_p - h_c - h_m = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

h_m = افت موضعی

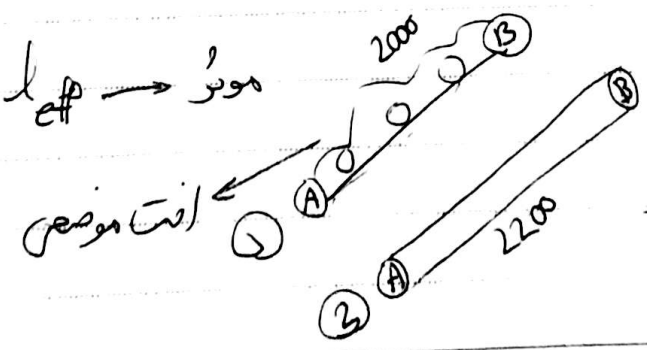
K = ضریب - -

$h_m = f(R_e, \text{هندسه}) = K\frac{V^2}{2g}$

طول معادل :

اگر بخواهیم افت موضعی را به وسیله روابط مربوط به افت اصطکاکی محاسبه کنیم باید پارامتری به نام طول موضعی مورد نیاز خواهد بود که از رابطه زیر به دست خواهد آمد.

$$K = f\frac{L}{D} \rightarrow \frac{Kd}{f} = L_{eff} \rightarrow \text{موتر}$$



★ در شکل ⊥ به دلیل وجود افت موضعی می توان از طول موتر شکل ⊥ استفاده کرد. (2200m)

Subject
Year Month: Day: ( )

مثال ۳

ex ۲: در لوله‌ای به قطر 0.5m و ضریب اصطکاک $f = 0.02$ برای یک زانویی $k = 0.9$ و برای یک شیر توپی $k = 10$ و برای یک شیر دروازه‌ای $k = 0.7$ می‌باشد طول معادل را محاسبه کنید.

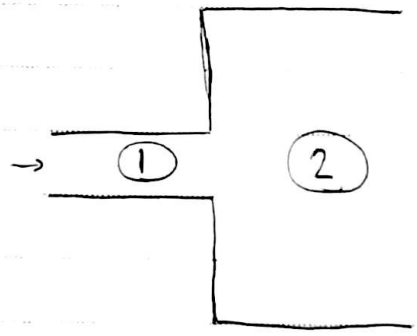
زانویی $k = 0.9$ $\quad L_{eff} = \frac{kd}{f} \Rightarrow \frac{0.9 \times 0.5}{0.02} = 22.5\,m$

توپی $k = 10$ $\quad L_{eff} = \frac{kd}{f} \Rightarrow \frac{10 \times 0.5}{0.02} = 250\,m$

دروازه‌ای $k = 0.7$ $\quad L_{eff} = \frac{kd}{f} \Rightarrow \frac{0.7 \times 0.5}{0.02} = 17.5\,m$

$L_{eff} = 290\,m$

افزایش مقطع ناگهانی (انبساط ناگهانی):

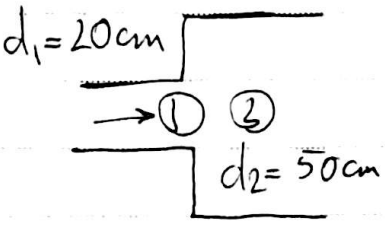


$$h_m = k\frac{V_1^2}{2g} = \frac{(V_1^2 - V_2^2)}{2g}$$

$$k = \left[1 - \frac{A_1}{A_2}\right]^2 = \left[1 - \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2\right]^2$$

مثال ۴

ex ۳: آب با دبی حجمی $5\,m^3/s$ از داخل لوله‌ای به قطر 20cm عبور می‌کند اگر قطر لوله به صورت ناگهانی به 30cm افزایش یابد میزان افت موضعی را محاسبه کنید.



$$k = \left[1 - \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2\right]^2 = \left[1 - \left(\frac{20}{30}\right)^2\right]^2 = 0.3086$$

$$Q_1 = A_1 V_1 \Rightarrow 5 = \frac{\pi \times (0.2)^2}{4} V_1 \Rightarrow V_1 = 159.25\,m/s$$

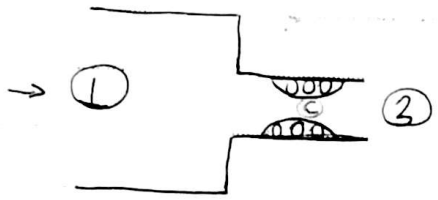
$$h_m = k\frac{V_1^2}{2g} = 0.3086\frac{(159.25)^2}{2 \times 9.81} = 399\,m$$

Jafis

Subject:
Year: Month: Day ( )

نکته: درحالت خاص برای تخلیه یک مخزن در یک محفظه بزرگ $K=1$ می‌باشد (انبساط ناگهانی)

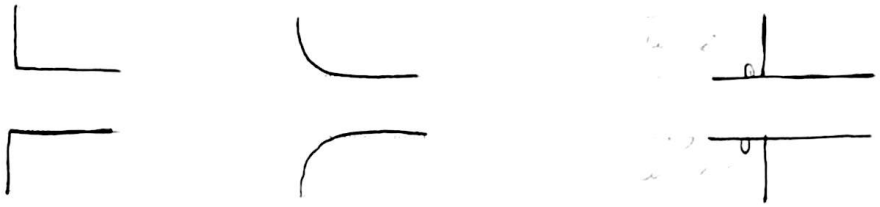
نکته: افت فشار مقطع ناگهانی به صورت انقباض ناگهانی



$$h = K\frac{V_2^2}{2g} = \frac{(V_c - V_2)^2}{2g}$$

$$K = \left[\left(\frac{A_2}{A_c}\right) - 1\right]^2$$

نکته:

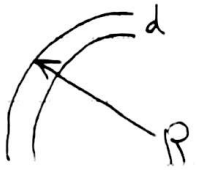


$K = 0.5$ $K = 0.1$ تا 0.5 $K = 0.8$ تا 1

تلفات در شیرها و زانویی‌ها:

1/2

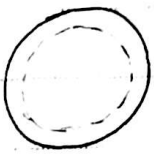
معمولا عددی K برای شیر و زانویی در مراجع مختلف اعلام شده است که برای زانویی تابع هندسه، طول، زاویه زانویی و نسبت $\frac{d}{R}$ خواهد بود



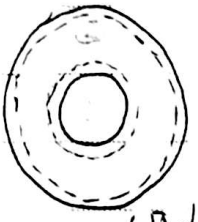
نکته:

قطر معادل هیدرولیکی:

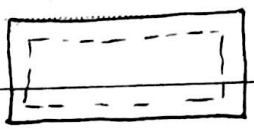
در مواقعی که سطح مقطع مورد نظر دایره نباشد از مفهوم قطر هیدرولیکی که به صورت مرمدل $d_h = \frac{4A}{P}$ استفاده می‌شود.



$$d_h = \frac{4\frac{\pi d^2}{4}}{\pi d} = d$$



$$d_h = \frac{4\left(\frac{\pi d_2^2}{4} - \frac{\pi d_1^2}{4}\right)}{\pi d_1 + \pi d_2}$$



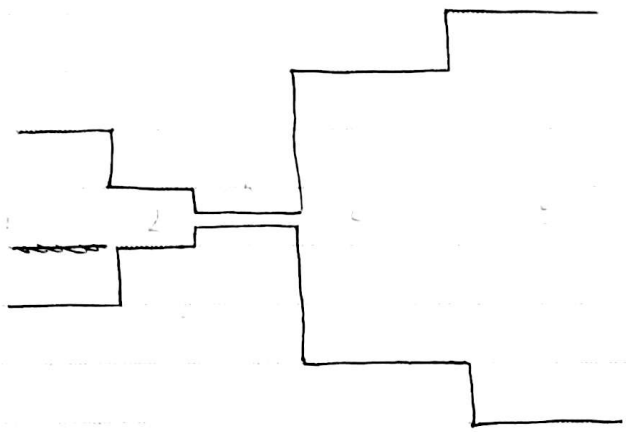
$$d_h = \frac{4(a.b)}{2(a+b)} = \frac{2ab}{a+b}$$

Nafis

Subject:
Year: Month: Day: ( )

سیستم چند لوله‌ای

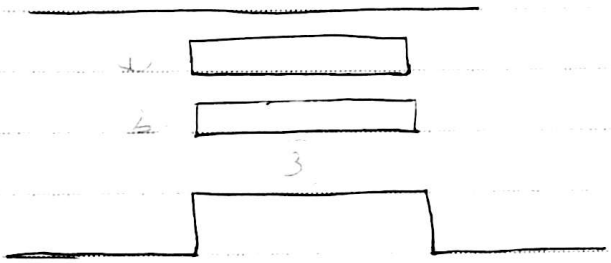
1- اتصال سری :



$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = Q_5$$

$$h_{f_T} = \sum h_f$$

2- اتصال موازی



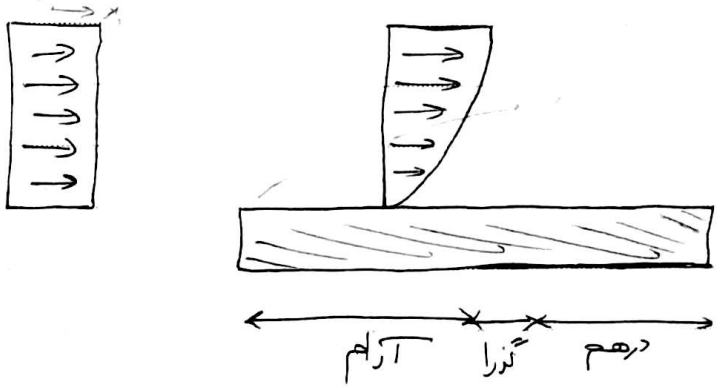
$$Q_T = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

$$h_{f_1} = h_{f_2} = h_{f_3}$$

Subject
Year Month Day ( )

لایه مرزی:

با عبور یک جریان با سرعت یکنواخت به یک دیواره تخت ثابت در نزدیکی دیواره اثرات دیواره بر روی مولکول های مجاور تا حد محسوس بوده و باعث کاهش سرعت مولکول ها خواهد شد. اما پس از مدتی که از دیواره فاصله گرفته این مقدار اثر دیواره کم و کمتر شده و از نقطه ای به بعد این مقدار صفر خواهد شد. محلی که اثرات لایه مرزی در آن احساس می شود داخل لایه مرزی و محلی که اثرات احساس نمی شود خارج لایه مرزی خواهد بود. لایه مرزی از ابتدای صفحه شروع شده و رفته رفته ضخیم تر خواهد شد باید توجه داشت بخش ابتدایی لایه مرزی جریان آرام بوده رفته رفته تبدیل به حالت آشفته درمی آید و در نهایت جریان درهم خواهد شد. معیار تعیین این آشفتگی عدد رینولدز خواهد بود

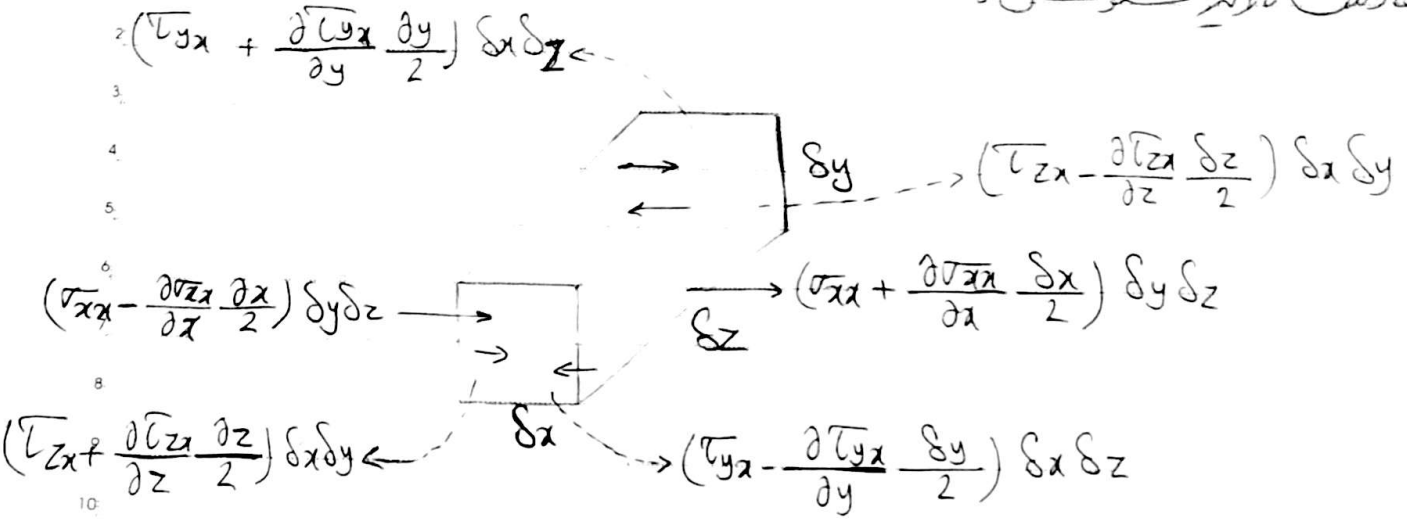


آرام $Re < 5\times10^5$ turbo $Re > 5\times10^5$

$$Re = \frac{\rho u x}{\mu}$$

Subject
Year Month Day ( )

معادلات ناویر استوکس:



(۱)
$$\begin{cases} \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \end{cases}$$

$u_x = u$
$u_y = v$
$u_z = w$

(۲)
$$\begin{cases} x = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \\ y = \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \\ z = \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + w\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \end{cases}$$

(۳)
$$\begin{cases} \text{پیوستگی} \rightarrow \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \\ u = u(x,y,z),\ v = v(x,y,z),\ w = w(x,y,z) \end{cases}$$

$\rho = \rho(x,y,z)$

$P = P(x,y,z)$

فرضیات معادلات لایه مرزی:

1- جریان تراکم ناپذیر است $\rho = cte$

2- پایا است $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

3- خواص ثابت هستند $\mu = cte$

4- فرض شده که u خیلی خیلی بزرگتر از سرعت در جهت v و w است. $u \gg v, w$

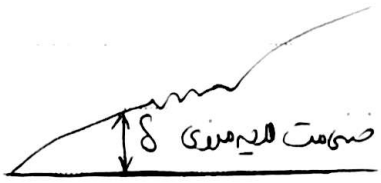
5- $\frac{\partial u}{\partial y} \gg \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}$

پیوستگی $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial P}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

} بعد از ساده سازی معادله ناویر استوکس با این معادله‌ها دست پیدا خواهیم کرد.

شرایط مرزی برای حل معادلات لایه مرزی:



① $y = 0$ $\quad u = v = 0$

② $y = \delta$ $\quad u = U_\infty$

③ $y = 0$ $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

④ $y = \delta$ $\quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$