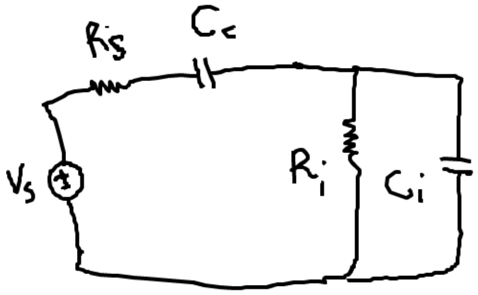
مدارهای مقاومتی - خازنی :

یادآوری :

$$f(t) = f(\infty) + [f(0^+) - f(\infty)]\, e^{-t/\tau}$$

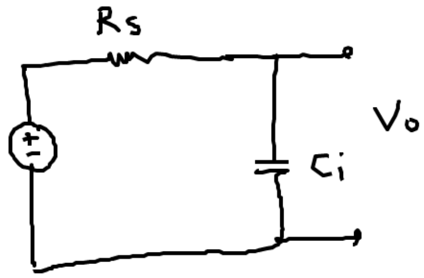
پاسخ مدارهای RC یا RL به تابع تحریک پله

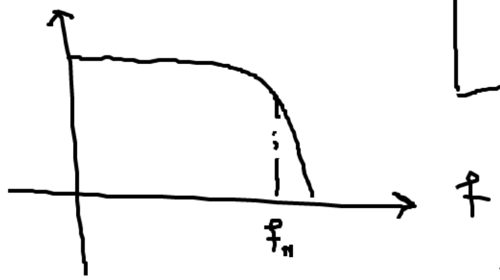


در فرکانسهای بالا

$X_{C_c} \ll R_s$

و $X_{C_i} \ll R_i$ $\Rightarrow$



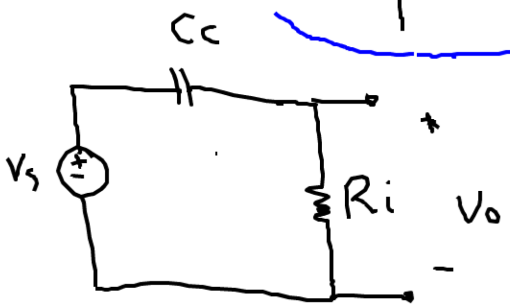


مدار RC پائین گذر

در فرکانسهای پائین

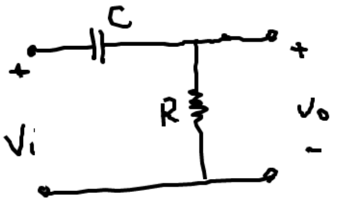
$X_{C_c} \gg R_s$

$X_{C_i} \gg R_i$ $\Rightarrow$



مدار بالاگذر

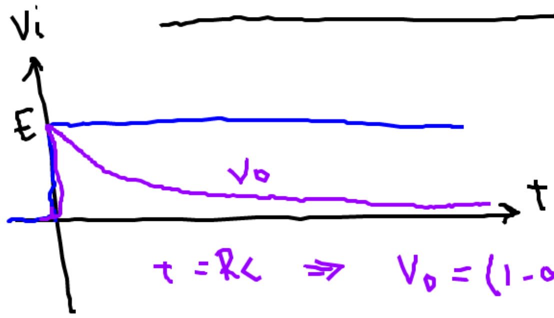
مدار RC بالاگذر:



$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} \Rightarrow \frac{|V_o|}{|V_i|} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{|V_o|}{|V_i|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega RC}\right)^2}} \quad : \quad \frac{1}{\omega RC} = 1$$

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow 2\pi f_L = \frac{1}{RC} \Rightarrow f_L = \frac{1}{2\pi RC}$$



$t = RC \Rightarrow V_o = (1 - 0.63)E$

$t = 5RC \Rightarrow V_o = (1 - 0.99)E$

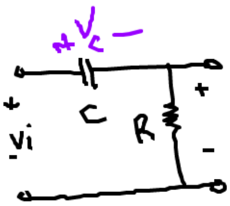
پاسخ مدار RC بالاگذر به ورودی پله:

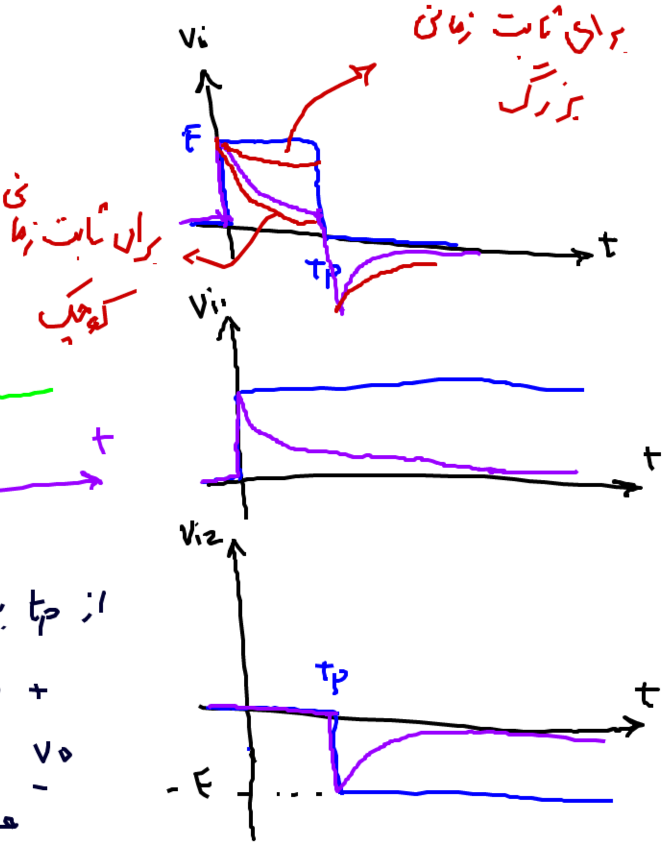
$$V_o(t) = V_o(\infty) + \left[V_o(0^+) - V_o(\infty)\right] e^{-t/\tau}$$

$$V_o(\infty) = 0 \quad , \quad V_o(0^+) = E \qquad \tau = RC$$

$$V_o(t) = 0 + [E - 0]\, e^{-t/RC} \Rightarrow V_o(t) = E e^{-t/RC}$$

پاسخ مدار RC بالاگذر به ورودی پالس :

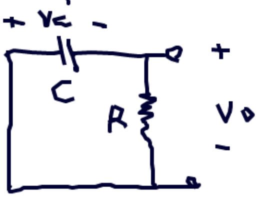




$$V_{o_1} = E e^{-t/RC}$$

$$V_o(t) = V_o(\infty) + [V_o(0^+) - V_o(\infty)] e^{-t/\tau}$$

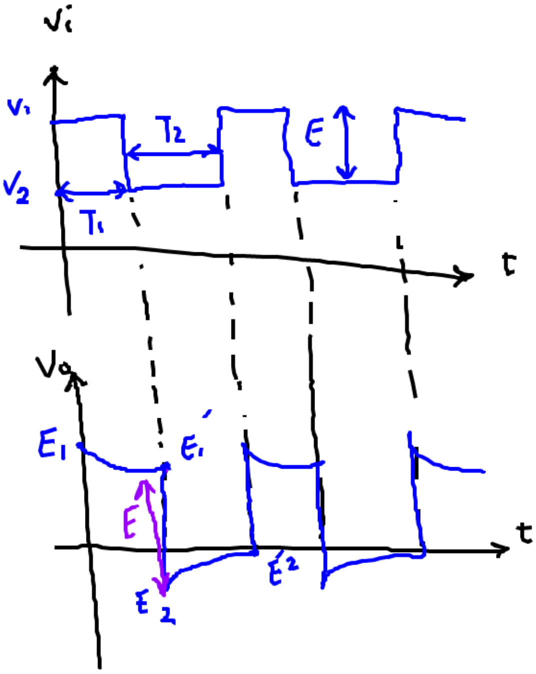
از t_p به بعد داریم :



$$V_{o_2}(t) = -E e^{-(t-t_p)/RC}$$

$$V_o = \begin{cases} E e^{-t/RC} & 0 \leq t < t_p \\ E e^{-t/RC} - E e^{-(t-t_p)/RC} & t \geq t_p \end{cases}$$

پاسخ مدار RC بالاگذر به ورودی مستطیلی :



$: T_2 > T_1$

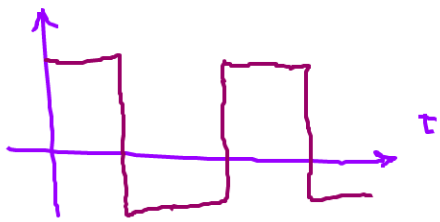
$$V_o = \begin{cases} E_1 e^{-t/RC} & 0 \le t < T_1 \\ E_2 e^{-(t-T_1)/RC} & T_1 \le t < T_1+T_2 \end{cases}$$

$T_1 : \quad V_i = V_C + V_R \Rightarrow V_1 = V_C + E_1' \Rightarrow V_C = V_1 - E_1'$

$T_2 : \Rightarrow \quad V_2 = V_1 - E_1' + E_2 \Rightarrow V_2 - V_1 = E_2 - E_1'$

$T = T_1 + T_2$

$RC \gg T$



$RC \ll T$

ویژگیهای مدار RC بالاگذر:

۱- مقدار متوسط (DC) برای ورودی هرچه باشد، در خروجی مقدار آن صفر است.

$$V_o + V_C = V_i \Rightarrow V_o + \frac{q}{C} = V_i \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{dV_o}{dt} + \underbrace{\frac{dq}{C\,dt}}_{i} = \frac{dV_i}{dt}$$

$$i = \frac{V_o}{R} \Rightarrow \frac{dV_o}{dt} + \frac{V_o}{RC} = \frac{dV_i}{dt} \xrightarrow[\text{روی } T]{\text{انتگرال}} V_o\Big|_0^T + \frac{1}{RC}\int^T V_o\,dt = V_i\Big|_0^T$$

$$\begin{cases} V_o(T) = V_o(0) \\ V_i(T) = V_i(0) \end{cases} \Rightarrow 0 + \frac{1}{RC}\int^T V_o\,dt = 0$$

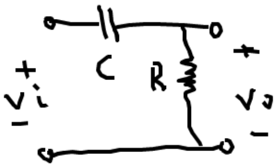
$$\Rightarrow \frac{1}{T}\int^T V_o\,dt = 0$$

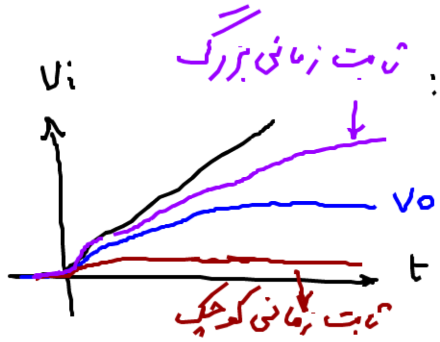
۲- اگر ورودی به طور ناگهانی به مقدار E تغییر کند، خروجی نیز به همان مقدار در همان جهت تغییر خواهد کرد.

۳- جهت نمایی های خروجی همواره در حال میل کردن به سمت صفر می باشد.

تمرین: در روابط مربوط به پاسخ مدار RC بالاگذر به ورودی موج مستطیلی E_1 را بدست آورید.

- پاسخ مدار RC بالاگذر به ورودی شیب:





$$V_i = \begin{cases} 0 & t<0 \\ \alpha t & t \geq 0 \end{cases}$$

$$V_i = V_C + V_o \Rightarrow V_i = \frac{1}{C}\int i\,dt + V_o \quad : \quad i = \frac{V_o}{R}$$

$$\Rightarrow V_i = \frac{1}{RC}\int V_o\,dt + V_o \xRightarrow{\text{مشتق}} \frac{1}{RC}V_o + \frac{dV_o}{dt} = \alpha$$

$$V_o = V_{oh} + V_{op} \quad : \quad \frac{1}{RC}V_o + \frac{dV_o}{dt} = 0 \xRightarrow{\text{لاپلاس}} \frac{1}{RC} + S = 0 \Rightarrow S = -1/RC$$

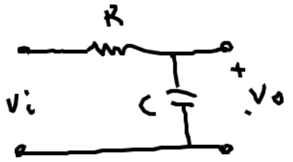
$$\Rightarrow V_{oh} = Ke^{St} \Rightarrow V_{oh} = Ke^{-t/RC}$$

$$V_{op} = A \Rightarrow V_{op}' = 0 \quad : \quad \frac{1}{RC}V_{op} + \frac{dV_{op}}{dt} = \alpha \Rightarrow \frac{A}{RC} + 0 = \alpha \Rightarrow A = \alpha RC$$

$$V_o = V_{oh} + V_{op} = Ke^{-t/RC} + \alpha RC \Rightarrow 0 = K + \alpha RC \Rightarrow K = -\alpha RC$$

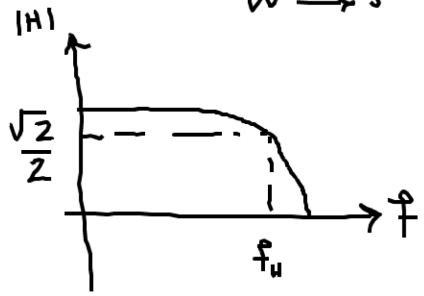
$$V_o = \alpha RC - \alpha RC\, e^{-t/RC}$$

مدارات RC پایین گذر :



$$H = \frac{V_o}{V_i} = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} \Rightarrow H = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

$$W \to 0 \Rightarrow \frac{V_o}{V_i} = 1 \quad , \quad W \to \infty \Rightarrow \frac{V_o}{V_i} = 0$$



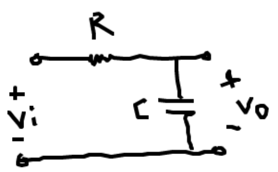
$$f = f_H \Rightarrow |H| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad : \omega = 2\pi f$$

$$|H| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \Rightarrow |H| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega RC = 1$$

$$\Rightarrow 2\pi f_H RC = 1 \Rightarrow f_H = \frac{1}{2\pi RC} \quad : \quad \tau = RC$$

$$f_H = \frac{1}{2\pi \tau}$$

- پاسخ مدار RC پایین گذر به ورودی‌های مختلف

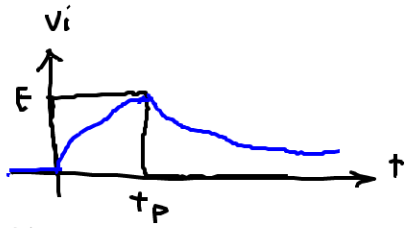


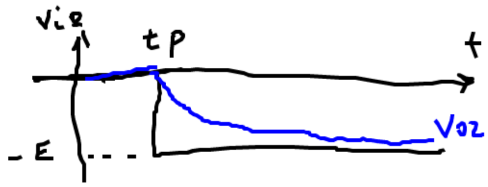
الف - ورودی پله :

$$V_o(t) = V_o(\infty) + \left[V_o(0^+) - V_o(\infty)\right] e^{-t/\tau}$$

$$V_o(\infty) = E \quad , \quad V_o(0^+) = V_o(0^-) = 0 \Rightarrow V_o(t) = E - E e^{-t/\tau}$$

ب - ورودی پالس مربعی :

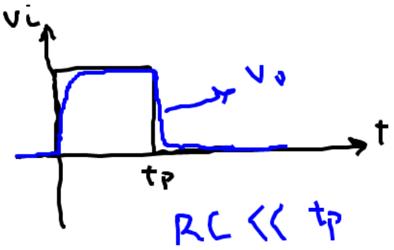




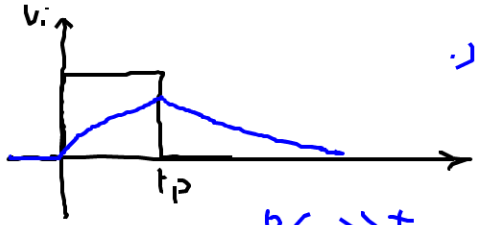
$$V_{o1} = E - E e^{-t/\tau}$$

$$V_{o2} = E e^{-(t-t_p)/\tau} - E$$

$$V_o = V_{o1} + V_{o2} = \begin{cases} E - E e^{-t/\tau} & : 0 < t < t_p \\ \left(e^{\frac{-t+t_p}{\tau}} - e^{-t/\tau}\right) E : & t_p < t \end{cases}$$



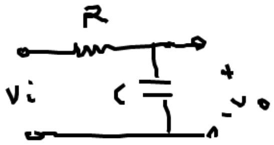
$RC \ll t_p$

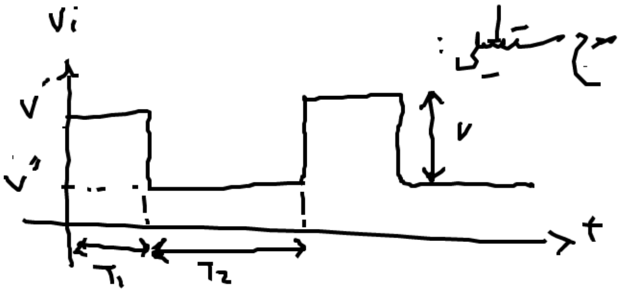


$RC \gg t_p$

رفتار انتگرال‌گیری دارد.

ج - پاسخ مدار RC پایین‌گذر به ورودی موج مستطیلی:

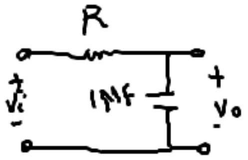


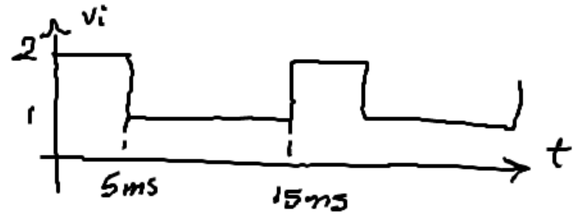


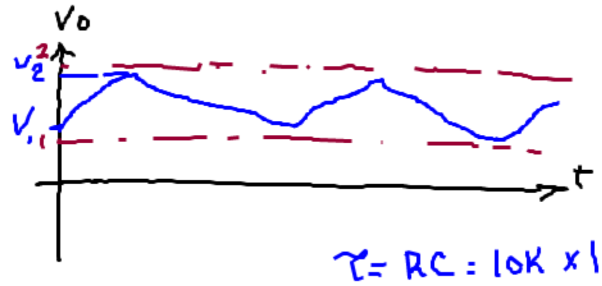
$T_2 > T_1 \quad , \quad T = T_1 + T_2$

$$V_o = \begin{cases} V' + [V_1 - V']\, e^{-t/\tau} & : \ 0 \leq t < T_1 \\ V'' + [V_2 - V'']\, e^{-(t-T_1)/\tau} & : \ T_1 \leq t < T_1 + T_2 \end{cases}$$

مثال: پاسخ مدار RC پایین گذر را به ورودی v_i در دو حالت الف) $R=10K\Omega$ ب) $R=100\Omega$ [illegible] را بدست آورید.







الف - $\tau = RC = 10K \times 1\mu F = 10ms$

$$V_o = \begin{cases} 2 + [V_1 - 2]\, e^{-100t} & : 0 \leq t < 5ms \\ 1 + [V_2 - 1]\, e^{-100(t-5m)} & : 5m \leq t < 15ms \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_2 = 2 + [V_1 - 2]\, e^{-0.5} \\ V_1 = 1 + [V_2 - 1]\, e^{-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_2 = 2 + [V_1 - 2] \times 0.6 \\ V_1 = 1 + [V_2 - 1] \times 0.37 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0.6V_1 - V_2 = -0.8 \\ V_1 - 0.37V_2 = 0.63 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1 \simeq 1.2V \\ V_2 \simeq 1.52V \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_o = \begin{cases} 2 - 0.8\, e^{-100t} & : 0 \leq t < 5ms \\ 1 + 0.52\, e^{-100(t-5m)} & : 5ms \leq t < 15ms \end{cases}$$

ب -

$$\tau = RC = 100 \times 1\mu = 100\mu s$$

$$V_o = \begin{cases} 2 + [V_1 - 2]\, e^{-10^4 t} & : 0 \leqslant t < 5ms \\ 1 + [V_2 - 1]\, e^{-10^4 (t - 5m)} & : 5ms \leqslant t < 15ms \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 5ms : & V_2 = 2 + \underbrace{[V_1 - 2]\, e^{-50}}_{\simeq 0} \\ t = 15ms : & V_1 = 1 + \underbrace{[V_2 - 1]\, e^{-100}}_{\simeq 0} \end{cases}$$

$$V_2 \simeq 2$$

$$V_1 \simeq 1 \quad \Rightarrow \quad V_o = \begin{cases} 2 - e^{-10^4 t} & : 0 \leqslant t < 5m \\ 1 + e^{-10^4 (t - 5m)} & : 5m \leqslant t < 15m \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau = 100\mu s \\ T = 15ms \end{cases}$$

- زمان صعود و زمان نزول برای یک خروجی در مدار RC پایین گذر:

گفتیم زمان صعود زمانی است که دامنه سیگنال از ۱۰٪ مقدار نهایی به ۹۰٪ مقدار نهایی برسد.

با فرض اینکه مقدار نهایی E و مقدار اولیه صفر باشد داریم:

$$V_0 = E + [0 - E]e^{-t/\tau} \Rightarrow V_0 = E - E e^{-t/\tau} \Rightarrow \underline{E e^{-t/\tau} = E - V_0}$$

$$t = t_2 \Rightarrow V_0 = 0.9E \Rightarrow E e^{-t_2/\tau} = E - 0.9E \Rightarrow e^{-t_2/RC} = 0.1$$

$$\Rightarrow e^{t_2/RC} = 10 \Rightarrow t_2 = RC \ln 10 \Rightarrow \underline{t_2 = 2.3\ RC}$$

$$t = t_1 \Rightarrow V_0 = 0.1E \Rightarrow E e^{-t_1/\tau} = E - 0.1E \Rightarrow e^{-t_1/RC} = 0.9$$

$$\Rightarrow e^{t_1/RC} = \frac{10}{9} \Rightarrow t_1 = RC \ln \frac{10}{9} \Rightarrow t_1 = 0.1\ RC$$

$$t_r = t_2 - t_1 \Rightarrow \underline{t_r = 2.2\ RC}$$

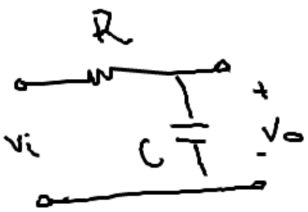
به همین ترتیب $t_f = 2.2\ RC$

- رابطه بین فرکانس قطع و زمان صعود در یک مدار RC پایین گذر:

$$f_H = \frac{1}{2\pi RC} \quad , \quad t_r = 2.2\,RC \Rightarrow RC = \frac{t_r}{2.2}$$

$$f_H = \frac{1}{2\pi \frac{t_r}{2.2}} \Rightarrow t_r = \frac{2.2}{2\pi f_H} \Rightarrow t_r = \frac{0.35}{f_H}$$

د- پاسخ مدار RC پایین گذر به ورودی بالارونده:



$$v_i = \begin{cases} 0 & : t \leq 0 \\ \alpha t & : t > 0 \end{cases}$$

$$v_i = v_R + v_o \Rightarrow v_i = Ri + v_o \quad : \quad i = C\frac{dv_o}{dt} \Rightarrow v_i = RC\frac{dv_o}{dt} + v_o$$

$$\Rightarrow \frac{dv_o}{dt} + \frac{1}{RC}v_o = \frac{\alpha t}{RC} \quad : \quad v_o = v_{oh} + v_{op}$$

$$\frac{dv_o}{dt} + \frac{1}{RC}v_o = 0 \overset{\text{لاپلاس}}{\Longrightarrow} s + \frac{1}{RC} = 0 \Rightarrow s = -1/RC$$

$$v_{oh} = Ke^{st} \Rightarrow v_{oh} = Ke^{-t/RC}$$

$$v_{op} = At + B \Rightarrow \frac{dv_{op}}{dt} = A \quad : \quad A + \frac{1}{RC}(At + B) = \frac{\alpha t}{RC}$$

$$\Rightarrow ARC + At + B = \alpha t \Rightarrow A = \alpha$$

$$ARC + B = 0 \Rightarrow B = -ARC = -\alpha RC$$

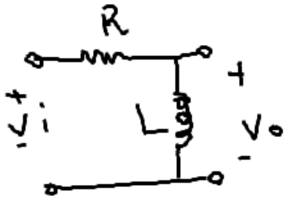
$$V_{op} = \alpha t - \alpha RC \qquad V_o = V_{oh} + V_{op}$$

$$\Rightarrow \quad V_o = K e^{-t/RC} + \alpha t - \alpha RC$$

$$: t = 0 \text{ , } V_o(0) = 0 \quad \Rightarrow K = \alpha RC$$

$$: V_o = \alpha RC \, e^{-t/RC} + \alpha t - \alpha RC$$

مدار R_L بالاگذر :



$$H = \frac{V_o}{V_i} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L}$$

$$\omega \to \infty \Rightarrow \frac{V_o}{V_i} = 1 \quad ، \quad \omega \to 0 \Rightarrow \frac{V_o}{V_i} = 0$$

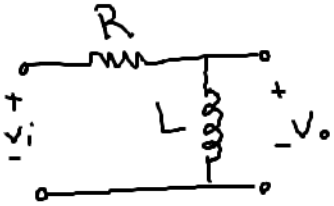
$$|H| = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{\omega L}\right)^2}}$$

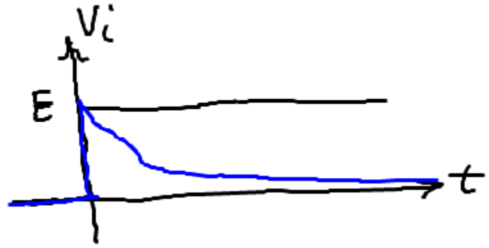
$$f = f_L \Rightarrow |H| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{R}{\omega L} = 1$$

$$\omega = 2\pi f_L \Rightarrow f_L = \frac{R}{2\pi L} \quad : \quad \tau = \frac{L}{R}$$

$$f_L = \frac{1}{2\pi\tau}$$

- پاسخ مدار RL بالاگذر به ورودی پله :

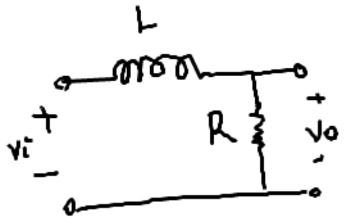




$$V_0 = V_0(\infty) + \{V_0(0^+) - V_0(\infty)\}\, e^{-t/\tau}$$

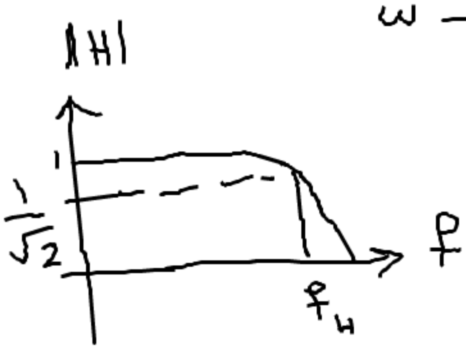
$V_0(\infty) = 0$ و $V_0(0^+) = E \Rightarrow V_0 = E\, e^{-Rt/L}$

- مدار RL پایین گذر :



$$H = \frac{V_0}{V_i} = \frac{R}{R + j\omega L}$$

$\omega \to 0 \Rightarrow \frac{V_0}{V_i} = 1$ ، $\omega \to \infty \Rightarrow \frac{V_0}{V_i} = 0$

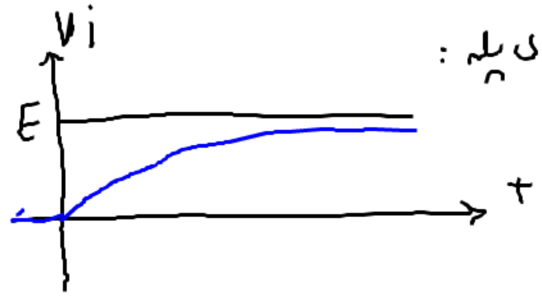


$$|H| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\omega L}{R})^2}}$$

$$f = f_H \Rightarrow |H| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\omega L}{R} = 1 \qquad \omega = 2\pi f$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi f_H L}{R} = 1 \Rightarrow f_H = \frac{R}{2\pi L} = \frac{1}{2\pi \tau}$$

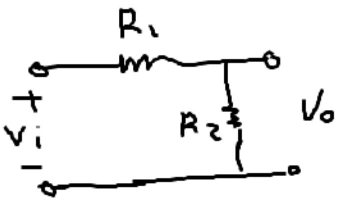
- پاسخ مدار RL پایین گذر به ورودی پله :



$$V_o = V_o(\infty) + \left[V_o(0^+) - V_o(\infty)\right] e^{-t/\tau}$$

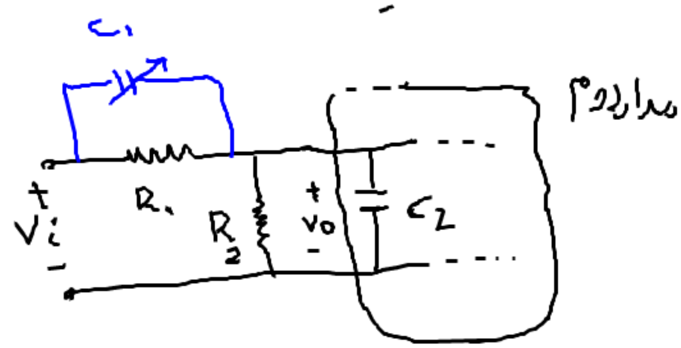
$$V_o(\infty) = E \;,\; V_o(0^+) = 0 \Rightarrow V_o(t) = E - E\, e^{-Rt/L}$$

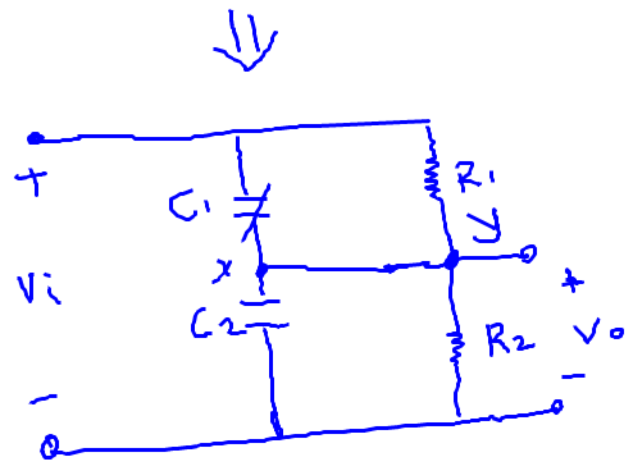
تضعیف کننده ها : Attenuators



$$: V_0 = \frac{R_2}{R_1+R_2} v_i = \alpha v_i$$

α → نسبت تضعیف





عناصر R_1، R_2، C_1 و C_2 تشکیل پل داده اند در حالت تعادل پل از شاخه xy جریانی عبور نمی کند

در حالت تعادل : $R_1 \times \frac{1}{C_2} = R_2 \times \frac{1}{C_1}$

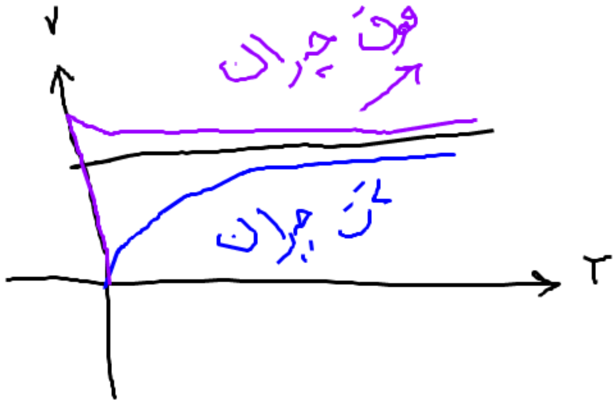
$$\Rightarrow R_1 C_1 = R_2 C_2$$

فرض می‌کنیم پل (متعادل) نباشد و $C_1 \neq \underbrace{R_2 C_2}_{R_1}$

در لحظه $t = 0^+$ با فرض صفر بودن ولتاژ خازنها، می‌توان از R_1 و R_2 در مقابل C_1 و C_2 صرف نظر کرد و داریم:

$$V_o(0^+) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} E$$

پاسخ زیر جبران $C_1 < \frac{R_2 C_2}{R_1}$ ، پاسخ فوق جبران $\Leftarrow C_1 > \frac{R_2 C_2}{R_1}$



$$V_o(\infty) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$$

برای اینکه خروجی اعوجاج نداشته باشد

باید $V_o(0^+) = V_o(\infty)$

تمرینات شماره : 14 - 15 - 16 - 19 - 23 و 28

دوباره، با تعویض جای خازن و مقاومت حل کنید.