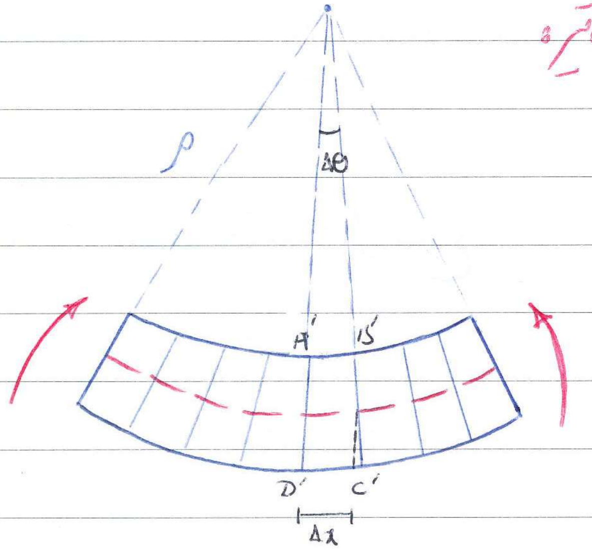
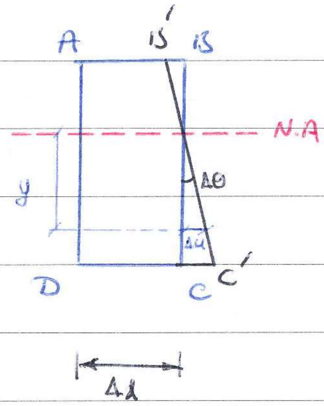
حمید کاظم

فصل اول :

تغییر شکل تیرها (Deflection Of Beam)

معادله دیفرانسیل تغییر شکل ارتجاعی تیره





تغییر شکل برشی در مقابل تغییر شکل خمشی ناچیز است اگر عرض تیر نسبت به طول تیر بسیار کم باشد (عمیق نباشد)

$\Delta u = -y\ \Delta\theta$

* منفی لازم است چون در y های منفی کشیدگی مثبت Δu مثبت داریم.

$\rightarrow \dfrac{\Delta u}{\Delta x} = -y\ \dfrac{\Delta\theta}{\Delta x}$, $\Delta x = \rho . \Delta\theta$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} = \varepsilon \\ \\ \dfrac{\Delta\theta}{\Delta x} = \dfrac{1}{\rho} \end{array}\right. \Rightarrow \varepsilon = -y . \frac{1}{\rho} \rightarrow \frac{1}{\rho} = -\frac{\varepsilon}{y}$$

رابطه کرنش انحنا

strain-curvature equation

$$\boxed{\varepsilon = \frac{-y}{\rho}}$$

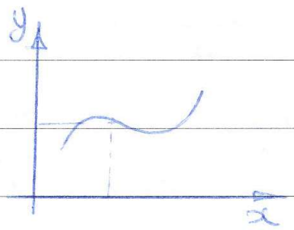
$$\frac{1}{\rho} = k \quad (\text{انحنا})$$

رابطه کرنش - انحنا متکی بر قانون هوک نیست پس هم در خمش ارتجاعی و هم خمش غیر ارتجاعی صادق است.

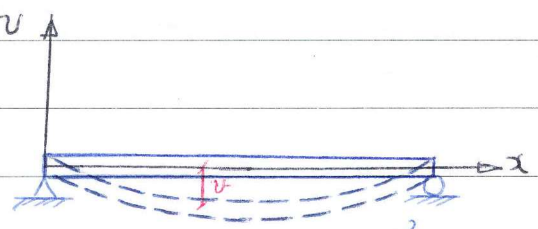
با فرض رفتار الاستیک خطی مصالح:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{-M \cdot y}{IE} \quad (1) \qquad , \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{-\varepsilon}{y} \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$ Moment curvature equation رابطه لنگر - انحنا



$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$



v فقط در مقطع می باشد و مبدا آن محور خنثی است. اما x مبدا آن ابتدای تیر است

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$

چون ما صلبیت را در تیر فرض می کنیم و تغییر شکل های تیر را بسیار کم می بینیم بنابراین شیب منحنی را تقریبا صفر می گیریم یعنی:

$$\frac{dv}{dx} \simeq 0$$

$\Rightarrow \dfrac{d^2v}{dx^2} = \dfrac{M}{EI}$ ← معادله دیفرانسیلی تغییر شکل تیر

اگر $M>0$ باشد تقعر به سمت بالا و اگر $M<0$ باشد تقعر به سمت پایین است (استاتیک)

* اگر تغییر شکل تیر $1/200$ طول تیر باشد خطای ایجاد شده ۱٪ است که قابل اغماض است.

اشکال دیگر معادله دیفرانسیل تغییر شکل تیر:

از این به بعد:

$$\begin{cases} v(x) \rightarrow \text{تغییر شکل تیر} \\ \dfrac{dv}{dx} = \theta \quad \text{شیب تیر} \end{cases}$$

$$(1) \quad \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \Rightarrow M(x) = EI\frac{d^2v}{dx^2}$$

$$(2) \quad \frac{dM}{dx} = V(x) \Rightarrow V(x) = \frac{d}{dx}\left(EI\frac{d^2v}{dx^2}\right)$$

حالت خاص: اگر EI در طول تیر ثابت باشد

$$\Rightarrow V(x) = EI\frac{d^3v}{dx^3}$$

$$(3) \quad \frac{dV}{dx} = q(x) \Rightarrow q(x) = \frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2v}{dx^2}\right) \xrightarrow{\text{حالت خاص}} q(x) = EI\frac{d^4v}{dx^4}$$

$$1)\ M(x) = EI\frac{d^2v}{dx^2} \qquad 2)\ V(x) = EI\frac{d^3v}{dx^3} \qquad 3)\ q(x) = EI\frac{d^4v}{dx^4}$$

شرایط مرزی تیرها

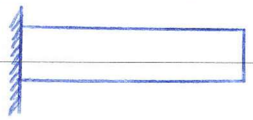
۱) همگن
- هندسی
- استاتیکی

۲) غیر همگن
- هندسی
- استاتیکی

* شرایط مرزی همگن مربوط به کمیت‌هایی برابر صفر می‌باشد در حالیکه شرایط مرزی غیر همگن مربوط به کمیت‌های غیر صفر می‌باشد.

* شرایط مرزی هندسی شرایطی هستند که بیانگر کمیت‌های هندسی هستند ولی کمیت‌های استاتیکی مربوط به کمیت‌های نیرویی هستند.

۱) تکیه‌گاه گیردار



در محل تکیه‌گاه:

$u = 0$ (شرط مرزی هندسی - همگن)

$\frac{du}{dx} = 0$ (شرط مرزی هندسی - همگن)

۲) تکیه‌گاه مفصلی غلتکی در انتهای تیر

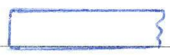
محل تکیه‌گاه:

$u = 0$ (هندسی - همگن)

$M = 0$ (استاتیکی - همگن) ← به شرط عدم اعمال لنگر متمرکز خارجی

اگر لنگر متمرکز خارجی در تکیه‌گاه اعمال شود: (انتهای غیر همگن) $M=M_0$

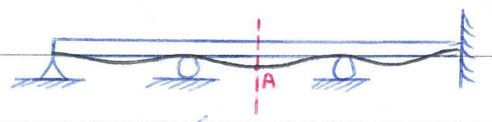
۳) انتهای آزاد تیر:



به شرط عدم اعمال لنگر متمرکز (انتهای همگن) $M=0$

به شرط عدم اعمال بار متمرکز (انتهای همگن) $V=0$

شرایط پیوستگی فیزیکی:



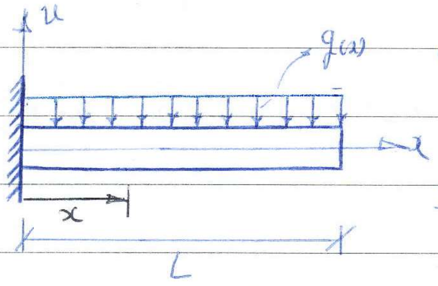
یعنی تیر نشان داده شده باید تغییر شکلش پیوسته باشد یعنی هیچ‌گاه شکستگی نداشته باشیم.

← نه شکستگی نه انفصال

عدم شکستگی: شیب در دو طرف نقطه یکسان باشد. (مثلاً نقطه A)

عدم انفصال: تغییر شکل در دو طرف یک نقطه همواره یکسان است: (مثلاً نقطه A)

مثال: معادله منحنی تغییر شکل الاستیک تیر کنسول به طول l تحت بار گسترده یکنواخت را بدست آورده. تغییر مکان و شیب حداکثر را بدست آورید.



$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{M}{EI} \qquad M(x) = -\frac{q(l-x)^2}{2}$$

$$EI\frac{dv}{dx} = \frac{q(l-x)^3}{6} + C_1 \longrightarrow EIV = \frac{-q(l-x)^4}{24} + C_1 x + C_2$$

شرایط مرزی :
$$\begin{cases} v'(0) = 0 \Rightarrow C_1 = \dfrac{-ql^3}{6} \\ v(0) = 0 \Rightarrow C_2 = \dfrac{ql^4}{24} \end{cases} \longrightarrow \text{تکیه‌گاه}$$

$$\Rightarrow v(x) = \frac{q}{24EI}\left(-x^4 + 4Lx^3 - 6L^2x^2\right)$$

تغییر شکل ماکزیمم و شیب ماکزیمم در انتهای آزاد تیر است.

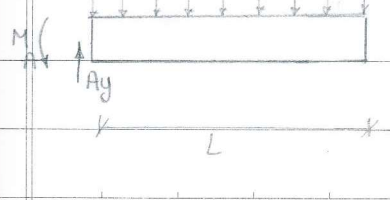
$$\delta_{Max} = v(l) = -\frac{ql^4}{8EI}$$

$$\theta_{Max} = v'(l) = -\frac{ql^3}{6EI}$$

یک شرط مرزی دیگری هم در انتهای آزاده تیر داریم : $V=0\ ,\ M=0$

می دانیم که M با $\frac{d^2v}{dx^2}$ و V با $\frac{d^3v}{dx^3}$ رابطه دارند ولی چون در معادله‌ی ما این دو وجود ندارند و فقط v و $\frac{dv}{dx}$ موجود است پس این شرط مرزی بدرد نمی‌خورد.

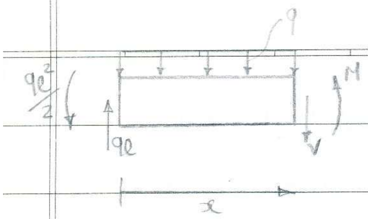
مثال : مثال فوق را با استفاده از معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم حل کنید. (تاکید می‌شود حتماً این مسئله را در منزل حل کنید و ما را کیف نمایید)



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y = ql$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A - ql(l/2) = 0$$

$$\Rightarrow M_A = \frac{ql^2}{2}$$



$$\sum F_y = 0 \rightarrow ql - qx - V = 0 \rightarrow V = q(l-x)$$

$$\sum M = 0 \rightarrow \frac{ql^2}{2} - qlx + \frac{qx^2}{2} + M = 0$$

$$\rightarrow M = \frac{-q}{2}(l^2 - 2lx + x^2) \rightarrow M = \frac{-q}{2}(l-x)^2$$

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = -q \rightarrow EI\frac{d^3v}{dx^3} = -qx + C_1 \rightarrow EI\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{1}{2}qx^2 + C_1x + C_2$$

$$\Rightarrow EI\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{6}qx^3 + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3$$

$$EIv = -\frac{1}{24}qx^4 + \frac{1}{6}C_1x^3 + \frac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4$$

شرایط مرزی ⇐ محل تکیه‌گاه $\begin{cases} v(0) = 0 \\ v'(0) = 0 \end{cases}$ انتهای آزاد $\begin{cases} M(l) = 0 \rightarrow \left.\frac{d^2v}{dx^2}\right|_{x=l} = 0 \\ V(l) = 0 \rightarrow \left.\frac{d^3v}{dx^3}\right|_{x=l} = 0 \end{cases}$

$$\left.\frac{d^3v}{dx^3}\right|_{x=l} = 0 \Rightarrow 0 = -ql + C_1 \Rightarrow C_1 = ql$$

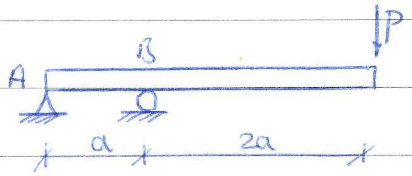
$$\left.\frac{d^2v}{dx^2}\right|_{x=l} = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{1}{2}ql^2 + ql^2 + C_2 \Rightarrow C_2 = -\frac{1}{2}ql^2$$

$$\left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=0} = 0 \Rightarrow C_3 = 0$$

$$v(0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0$$

$$v = \frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{24}qx^4 + \frac{1}{6}qlx^3 - \frac{1}{4}ql^2x^2\right) = \frac{q}{24EI}(-x^4 + 4lx^3 - 6l^2x^2)$$

نکته: انتخاب یکی از معادلات $M(x)=EI\frac{d^2v}{dx^2}$ ، $V(x)=EI\frac{d^3v}{dx^3}$ ، $q(x)=EI\frac{d^4v}{dx^4}$ برای یک حالت معلوم بستگی به این دارد که کدام یک از کمیت های بارگذاری، نیروی برشی و یا لنگر خمشی را بتوان به فرمول درآورد. برای روابط دیفرانسیل از مرتبهٔ پایین تر ثابت های انتگرال گیری کمتری مورد نیاز است. این موضوع می تواند معیاری برای انتخاب یکی از معادلات فوق باشد.



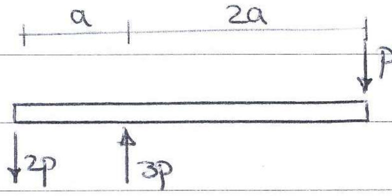
مثال: برای تیر نشان داده شده مطلوب است

الف) تعیین معادلات منحنی تغییر شکل تیر.

ب) محاسبه حداکثر تغییر مکان مثبت و منفی تیر.

* نقاط تغییر شکل برای کل شکل تیر است. اما نقاط تغییر مکان برای یک نقطه از تیر است. ولی بعضاً این دو لفظ به جای هم به کار می روند (حساسیتی نیست). بعضی کتاب ها هم از خیز نام می برند.

چون از دو ناحیه تشکیل شده دو معادله تغییر شکل دارد.



$$\sum M_A=0 \Rightarrow aB_y-3ap=0 \rightarrow B_y=3p$$

$$\sum F_y=0 \Rightarrow A_y+3p-p=0 \rightarrow A_y=-2p$$

$$0\leqslant x\leqslant a \rightarrow M(x)=-2px \Rightarrow EI\frac{d^2v_1}{dx^2}=-2px$$

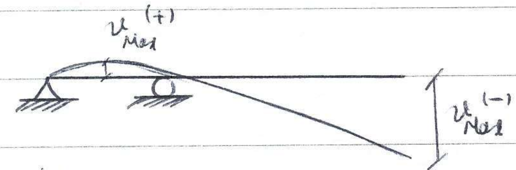
$$\rightarrow EI\frac{dv_1}{dx}=-px^2+C_1 \Rightarrow EIv_1=-\frac{px^3}{3}+C_1x+C_2$$

$$a\leqslant x\leqslant 3a \rightarrow M(x)=-p(3a-x) \rightarrow EI\frac{d^2v_2}{dx^2}=-p(3a-x)$$

$$\rightarrow EIv_2=-\frac{3pa}{2}x^2+\frac{p}{6}x^3+C_3x+C_4$$

شرایط مرزی
$$\begin{cases} v_1(0)=0 \\ v_1(a)=0 \\ v_2(a)=0 \\ \dfrac{dv_1}{dx}(a)=\dfrac{dv_2}{dx}(a) \end{cases} \Longrightarrow \quad C_1=\frac{Pa^2}{3}, \quad C_2=0, \quad C_3=\frac{11pa^2}{6}, \quad C_4=\frac{-Pa^3}{2}$$

$$\rightarrow v_1(x)=-\frac{Px^3}{3EI}+\frac{Pa^2}{3EI}x \qquad v_2(x)=\frac{P}{6EI}x^3-\frac{3Pa}{2EI}x^2+\frac{11Pa^2}{6EI}x-\frac{Pa^3}{2EI}$$



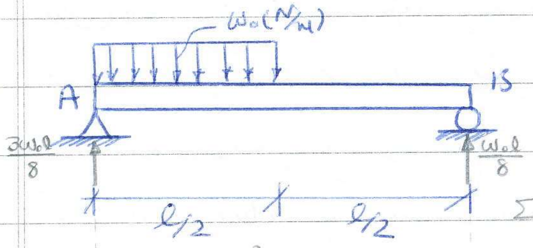
$$\begin{cases} 0\leqslant x\leqslant a \rightarrow M_1<0 \quad \text{تقعر منفی} \\ a\leqslant x\leqslant 3a \rightarrow M_2<0 \quad \text{تقعر منفی} \end{cases}$$

$$v_{Max}^{(-)}=v_2(3a)=\frac{-4Pa^3}{EI}$$

$$v_1'(x)=0 \Longrightarrow$$

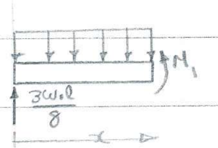
$$v_{Max}^{(+)}=\frac{2Pa^3\sqrt{3}}{27EI}$$

مثال : مطلوبست تعیین معادلات تغییر شکل تیر شکل داده شده.



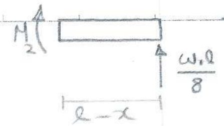
$$\sum M_A=0 \rightarrow -(w_0\tfrac{l}{2})\tfrac{l}{4}+B_y(l)=0$$

$$\rightarrow B_y=\frac{w_0l^2}{8} \qquad \sum F_y=0 \rightarrow A_y+\frac{w_0l}{8}-\frac{w_0l}{2}=0 \rightarrow A_y=\frac{3w_0l}{8}$$



$$M_1-\frac{3w_0l}{8}x+w_0x(\tfrac{x}{2})=0$$

$$\rightarrow M_1=\frac{3w_0l}{8}x-\frac{w_0}{2}x^2 \qquad 0\leqslant x\leqslant l/2$$



$$-M_2+\frac{w_0l}{8}(l-x)=0$$

$$\Longrightarrow M_2=-\frac{w_0l}{8}x+\frac{w_0l^2}{8} \qquad l/2\leqslant x\leqslant l$$

$0 \leq x \leq l/2 \rightarrow M_1 = -\frac{w_0}{2}x^2 + \frac{3w_0 l}{8}x \rightarrow EI\frac{dv_1}{dx} = -\frac{w_0}{6}x^3 + \frac{3w_0 l}{16}x^2 + C_1$

$\rightarrow EIv_1 = \frac{-w_0}{24}x^4 + \frac{w_0 l}{16}x^3 + C_1 x + C_2$

$l/2 \leq x \leq l \rightarrow M_2 = -\frac{w_0 l}{8}x + \frac{w_0 l^2}{8} \rightarrow EI\frac{dv_2}{dx} = -\frac{w_0 l}{16}x^2 + \frac{w_0 l^2}{8}x + C_3$

$\rightarrow EIv_2 = -\frac{w_0 l}{48}x^3 + \frac{w_0 l^2}{16}x^2 + C_3 x + C_4$

حال شرایط مرزی را بررسی می‌کنیم:

1) $v_1(0) = 0 \rightarrow \underline{C_2 = 0}$

2) $v_2(l) = 0 \rightarrow 0 = -\frac{w_0 l^4}{48} + \frac{w_0 l^4}{16} + C_3 l + C_4 \quad (I)$

3) $v_1'(l/2) = v_2'(l/2) \rightarrow -\frac{w_0 l^3}{48} + \frac{3w_0 l^3}{64} + C_1 = -\frac{w_0 l^3}{64} + \frac{w_0 l^3}{16} + C_3$

$\rightarrow C_1 - C_3 = \frac{w_0 l^3}{48}$

4) $v_1(l/2) = v_2(l/2) \rightarrow \frac{-w_0 l^4}{384} + \frac{w_0 l^4}{128} + \frac{l}{2}C_1 = -\frac{w_0 l^4}{384} + \frac{w_0 l^4}{64} + C_3 \frac{l}{2} + C_4$

$\rightarrow -\frac{w_0 l^4}{128} + \frac{l}{2}(C_1 - C_3) = C_4 \rightarrow \underline{C_4 = \frac{w_0 l^4}{384}}$

$(I) \rightarrow \underline{C_3 = \frac{17w_0 l^3}{384}} \quad , \quad \underline{C_1 = \frac{25w_0 l^3}{384}}$

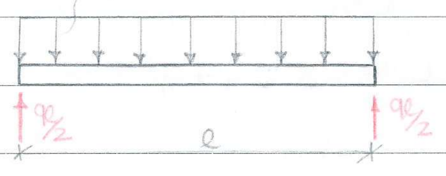
$$\begin{cases} v_1(x) = \frac{1}{EI}\left(-\frac{w_0}{24}x^4 + \frac{w_0 l}{16}x^3 + \frac{25w_0 l^3}{384}x\right) & 0 \leq x \leq l/2 \\ v_2(x) = \frac{1}{EI}\left(-\frac{w_0 l}{48}x^3 + \frac{w_0 l^2}{16}x^2 + \frac{17w_0 l^3}{384}x + \frac{w_0 l^4}{384}\right) \end{cases}$$

تمرین: برای تیر ساده (یک سر مفصل و یک سر غلتک) تحت بار گسترده یکنواخت به طول l معادله تغییر شکل تیر را از دو روش زیر بدست آورید:

الف) معادله دیفرانسیل مرتبه دوم ب) معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم

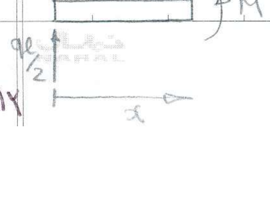
و تغییر مکان Max تیر را محاسبه نمایید.

الف)



$M - \frac{ql}{2}x + qx(x/2) = 0$

$\rightarrow M = -\frac{q}{2}x^2 + \frac{ql}{2}x$



$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{q}{2}x^2 + \frac{ql}{2}x \Rightarrow EI\frac{dv}{dx} = -\frac{q}{6}x^3 + \frac{ql}{4}x^2 + C_1$$

$$\Rightarrow EIv = \frac{-q}{24}x^4 + \frac{ql}{12}x^3 + C_1x + C_2$$

حال شرایط مرزی را اعمال می‌کنیم.

$$1)\ v(0)=0 \Rightarrow 0 = C_2$$

$$2)\ v(l)=0 \Rightarrow 0 = \frac{-q}{24}l^4 + \frac{q}{12}l^4 + C_1 l \Rightarrow C_1 = \frac{-q}{24}l^3$$

$$\Rightarrow v(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{-q}{24}x^4 + \frac{ql}{12}x^3 - \frac{q}{24}l^3x\right)$$

ب)

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = -q \Rightarrow EI\frac{d^3v}{dx^3} = -qx + C_1 \Rightarrow EI\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{-q}{2}x^2 + C_1x + C_2$$

$$\Rightarrow EI\frac{dv}{dx} = \frac{-q}{6}x^3 + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3$$

$$\Rightarrow EIv = \frac{-q}{24}x^4 + \frac{1}{6}C_1x^3 + \frac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4$$

شرایط مرزی را اعمال می‌کنیم.

$$1)\ v(0)=0 \Rightarrow C_4 = 0$$

$$2)\ M(0)=0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$3)\ M(l)=0 \Rightarrow 0 = \frac{-q}{2}l^2 + C_1 l \Rightarrow C_1 = \frac{q}{2}l$$

$$4)\ v(l)=0 \Rightarrow 0 = \frac{-q}{24}l^4 + \frac{q}{12}l^4 + C_3 l \Rightarrow C_3 = \frac{-q}{24}l^3$$

$$\Rightarrow v(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{-q}{24}x^4 + \frac{ql}{12}x^3 - \frac{ql^3}{24}x\right) =$$

ج)

$$v'(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{-q}{6}x^3 + \frac{ql}{4}x^2 - \frac{ql^3}{24}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{6}x^3 + \frac{l}{4}x^2 - \frac{l^3}{24} = 0 \Rightarrow -4x^3 + 6x^2 - l^3 = 0$$

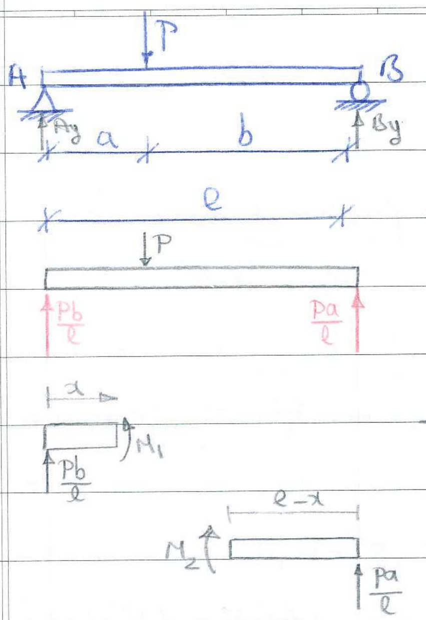
$$\Rightarrow x = l/2$$

$$\Rightarrow v(l/2) = \frac{+q}{24EI}\left(-\left(\frac{l}{2}\right)^4 + 2l\left(l/2\right)^3 - l^3\left(l/2\right)\right)$$

$$= \frac{q}{24EI}\left(\frac{-5}{16}l^4\right) \Rightarrow v_{Max} = \frac{5ql^4}{384EI}$$

$$v(x) = \frac{qx}{24EI}\left[-x^3 + 2lx^2 - l^3\right]$$

تمرین ۵: معادله تغییر شکل تیر را بدست آورید و تغییر مکان Max را بدست آورید



$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -Pa + B_y(l) = 0 \rightarrow B_y = \frac{Pa}{l}$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow A_y + B_y = P \rightarrow A_y = \frac{Pb}{l}$$

$$M_1 - \frac{Pb}{l}x = 0 \rightarrow M_1 = \frac{Pb}{l}x \qquad 0 \le x \le a$$

$$-M_2 + \frac{Pa}{l}(l-x) = 0 \rightarrow M_2 = \frac{-Pa}{l}x + Pa \qquad a \le x \le l$$

$$M_1 = \frac{Pb}{l}x \rightarrow EI\frac{d^2v_1}{dx^2} = \frac{Pb}{l}x$$

$$\rightarrow EI\frac{dv_1}{dx} = \frac{Pb}{2l}x^2 + C_1 \rightarrow EI\,v_1 = \frac{Pb}{6l}x^3 + C_1x + C_2 \qquad 0 \le x \le a$$

$$M_2 = \frac{-Pa}{l}x + Pa \rightarrow EI\frac{d^2v_2}{dx^2} = \frac{-Pa}{l}x + Pa \rightarrow EI\frac{dv_2}{dx} = \frac{-Pa}{2l}x^2 + Pax + C_3$$

$$EI\,v_2 = \frac{-Pa}{6l}x^3 + \frac{Pa}{2}x^2 + C_3x + C_4 \qquad a \le x \le l$$

شرایط مرزی:

1) $v_1(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0$

2) $v_2(l) = 0 \rightarrow -\frac{Pa}{6}l^2 + \frac{Pa}{2}l^2 + C_3l + C_4 = 0 \quad (1)$

3) $v_1'(a) = v_2'(a) \rightarrow \frac{Pb}{2l}a^2 + C_1 = \frac{-Pa}{2l}a^2 + Pa^2 + C_3$

$$\rightarrow Pa^2\left(\frac{b+a}{2l}\right) - Pa^2 = C_3 - C_1 \Rightarrow C_3 - C_1 = \frac{-1}{2}Pa^2 \quad (2)$$

4) $v_1(a) = v_2(a) \rightarrow \frac{Pb}{6l}a^3 + C_1a = \frac{-Pa}{6l}a^3 + \frac{P}{2}a^3 + C_3a + C_4$

$$\rightarrow Pa^3\left(\frac{b+a}{6l}\right) - \cancel{\frac{P}{2}a^3} = -\frac{1}{2}Pa^3 + C_4 \rightarrow C_4 = \frac{1}{6}Pa^3$$

$$(1) \rightarrow \frac{1}{3}Pal^2 + C_3l + \frac{1}{6}Pa^3 = 0 \qquad C_3 = \frac{-Pa}{6l}(2l^2 + a^2)$$

$$(2) \rightarrow C_3 + \frac{1}{2}Pa^2 = C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{3Pla^2}{6l} - \frac{Pa}{6l}(2l^2 + a^2)$$

$$\rightarrow C_1 = \frac{-Pa}{6l}(2l^2 - 3la + a^2)$$

$$\begin{cases} v_1 = \frac{1}{EI}\left[\frac{Pb}{6l}x^3 - \frac{Pax}{6l}(2l^2 - 3la + a^2)\right] & 0 \le x \le a \\ v_2 = \frac{1}{EI}\left[\frac{-Pa}{6l}x^3 + \frac{Pa}{2}x^2 - \frac{Pax}{6l}(2l^2 + a^2) + \frac{1}{6}Pa^3\right] & a \le x \le l \end{cases}$$