دانشگاه فنی و حرفه‌ای استان آذربایجان شرقی
East Azarbaijan University of Technical & Vocational

# ارتعاشات

## جلسه پنجم و ششم

مدرس:
دکتر علیرضا بابائی

آموزشکده فنی شماره ۲ تبریز

بسم الله الرحمن الرحیم

# ارتعاشات آزاد

## سیستم های یک درجه آزادی

کلیه سیستم هایی که دارای جرم و کشسانی هستند، می‌توانند ارتعاشات آزاد داشته باشند، یعنی ارتعاشاتی که در غیاب تحریک خارجی صورت پذیرد. اگر در حرکت این چنین سیستمی، انرژی تلف نشود، ارتعاش بوجود آمده ارتعاش آزاد نامیرا بود و در ارتعاشات آزاد میرا اثر دمپر عموماً بصورت مستهلک شدن دامنه ارتعاشات در طول زمان ظاهر می‌گردد.

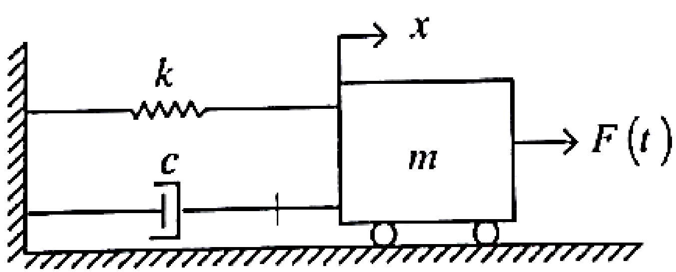
در این قسمت هدف، یادیگری چگونه نوشتن معادله حرکت و نیز محاسبه فرکانس طبیعی که اصولاً تابعی از جرم و سختی است، می باشد.

# ارتعاشات آزاد

## سیستم های یک درجه آزادی

فرم کلی معادله دیفرانسیل حرکت برای سیستم یک درجه آزادی خطی مطابق شکل بصورت زیر است

$$F(t) = m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t)$$




سیستم یک درجه آزادی

که $c$، $m$، $k$ به ترتیب مقادیر ضریب میرایی، جرم و سختی فنر بوده و $x$ جابجایی از وضعیت تعادل استاتیکی (متغیر درجه آزادی) و $F(t)$ نیروی خارجی می باشد.

این معادله حرکت یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم غیر همگن با ضرایب ثابت می باشد و دارای حل عمومی و خصوصی است.

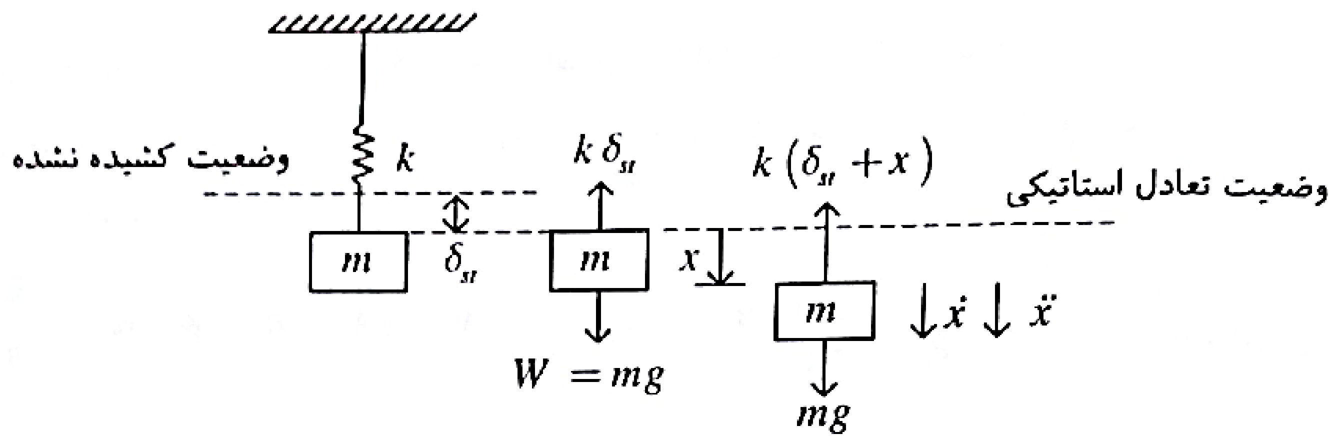
در شکل زیر یک سیستم ساده جرم- فنر نامیرا نشان داده شده است که فقط در جهت عمودی حرکت می‌کند. این سیستم دارای یک درجه آزادی $(DOF)$ می‌باشد، زیرا حرکت آن فقط با یک مختصه $x$ قابل بیان است. چنانچه سیستم به حرکت در آید، نوسانات با فرکانس طبیعی $f_n$ که از خواص سیستم است روی می دهد.

# ارتعاشات آزاد

## سیستم های یک درجه آزادی

- روش نیوتن

اولین روش برای بررسی حرکت سیستم قانون دوم نیوتن می باشد. همانطور که در شکل مشاهده می-شود،




انحراف فنر (تغییر طول استاتیکی فنر) در وضعیت تعادل استاتیکی $\delta_{st}$ است و در وضعیت تعادل استاتیکی نیروی $k\,\delta_{st}$ فنر با نیروی $W$ که بر جرم $m$ اثر می‌کند، برابر است یعنی:

$$k\,\delta_{st} = W = mg \qquad (1)$$

با اندازه‌گیری تغییر مکان $x$ از وضعیت تعادل استاتیکی و فرض اینکه $x$ در جهت رو به پایین مثبت می‌باشد نیروهای که بر جرم $m$ اثر می‌کنند عبارتند از $k\,(\delta_{st} + x)$ , $W$. (تمام کمیت ها اعم از نیرو، سرعت و شتاب در جهت رو به پایین مثبت فرض شوند.)

# ارتعاشات آزاد
## سیستم های یک درجه آزادی

- روش نیوتن

اکنون قانون دوم نیوتن را برای جرم $m$ بکار می بریم

$$\sum F = m\ddot{x} = W - k\left(\delta_{st} + x\right)$$

و با توجه به اینکه $k\delta_{st} = W$ ، بنابراین:

$$m\ddot{x} = -kx \qquad (۲)$$

ملاحظه می‌گردد که انتخاب وضعیت تعادل استاتیکی به عنوان مبدأ برای $x$ باعث می‌شود که نیروی وزن $W$ و نیروی استاتیکی $k\delta_{st}$ فنر در معادله حرکت ظاهر نشوند و تنها نیروی مؤثر بر جرم $m$ فقط همان بخش از نیروی ایجاد شده در فنر که بر اثر تغییر مکان $x$ بوجود آمده، باشد.

در نتیجه هر جا که وزن باعث ایجاد تغییر مکان استاتیکی در فنر شود، وزن وارد معادله نمی‌گردد.

با تعریف فرکانس دایره‌ای $\omega_n$ بصورت

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} \qquad (۳)$$

معادله (۲) را می توان به شکل زیر نوشت

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \qquad (۴)$$

# ارتعاشات آزاد

## سیستم های یک درجه آزادی

- روش نیوتن

معادله (۴) نشان می دهد که حرکت جرم، یک حرکت هارمونیک بوده و یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن می‌باشد، که دارای حل عمومی بصورت زیر است

$$x(t) = A\sin\omega_n t + B\cos\omega_n t \quad \text{یا} \quad x(t) = A_1\cos(\omega_n t - \phi) \qquad (۵)$$

که در آن $A$، $B$، $A_1$، $\phi$ ضرایب ثابت بوده و این ثابت ها از شرایط اولیه $x(0)$ ، $\dot{x}(0)$ بدست می‌آیند.
به عبارت ساده تر برای شروع حرکت به شرایط اولیه شامل تغییر مکان اولیه یا سرعت اولیه یا ترکیب هر دو نیاز می باشد. با جایگذاری شرایط اولیه ذکر شده در حل معادله حرکت پاسخ ارتعاش آزاد بصورت زیر بدست خواهد آمد

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = V_0 \end{cases} \rightarrow A = \frac{\dot{x}(0)}{\omega_n} = \frac{V_0}{\omega_n}, \; B = x(0) = x_0, \; A_1 = \sqrt{A^2 + B^2}, \; \phi = \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)$$

و یا

$$x(t) = \frac{V_0}{\omega_n}\sin\omega_n t + x_0\cos\omega_n t$$

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{V_0}{\omega_n}\right)^2}\cos\left(\omega_n t - \tan^{-1}\left(\frac{\omega_n x_0}{V_0}\right)\right) \qquad (۶)$$

# ارتعاشات آزاد

## سیستم های یک درجه آزادی

- روش نیوتن

با توجه به پاسخ ارتعاش آزاد می توان مشاهده نمود که در این حالت سیستم تا زمان بی نهایت، با دامنه ثابت و با فرکانس $\omega_n$ بصورت هارمونیک نوسان خواهد کرد، که این فرکانس همان فرکانس طبیعی سیستم است. به عبارتی فرکانس نوسانات آزاد سیستم، فرکانس طبیعی نام دارد.

توجه گردد که هیچگاه حرکت سیستم متوقف نمی شود و در طی حرکت همیشه تبدیل انرژی جنبشی به پتانسیل و برعکس آن تا زمان بی نهایت وجود خواهد داشت.

پریود طبیعی نوسانات از رابطه $\omega_n \tau = 2\pi$ بدست می‌آید

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (۷)$$

و فرکانس طبیعی بر حسب دور بر ثانیه عبارت است از:

$$f_n = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (۸)$$

توجه داشته باشید که فرکانس طبیعی سیستم فقط به پارامترهای جرم و سختی سیستم که از خواص سیستم هستند بستگی دارد و به شرایط اولیه بستگی ندارد. در حالیکه دامنه حرکت و اختلاف فاز با شرایط اولیه تغییر می کنند.

# ارتعاشات آزاد

## سیستم های یک درجه آزادی

- روش نیوتن

هر چند بحث فوق در باره سیستم جرم – فنر ساده ناميرا (همانند شکل نشان داده شده) صورت گرفت، نتایج آن برای سیستم های ۱ درجه آزادی، از جمله سیستم های دورانی صادق است. فنر می‌تواند یک تیر یا عضو پیچشی باشد و جرم می‌تواند با گشتاور اینرسی جایگزین گردد. جدول مقدار سفتی $k$ برای انواع مختلف فنرها در انتهای کتاب آورده شده است.

بنابراین توجه شود که در حالت ارتعاشات آزاد ناميرا $(F=0\,,C=0)$ فرم کلی معادله حرکت برای سیستم‌های یک درجه آزادی بصورت زیر می‌باشد

$$m\ddot{x}(t)+kx(t)=0$$

که فرکانس طبیعی سیستم برابر:

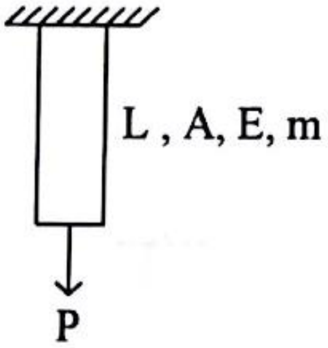
$$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

# ارتعاشات آزاد

## سیستم های یک درجه آزادی

- روش نیوتن

**ارتعاشات طولی:** ارتعاشات طولی در اثر نیروی محوری مطابق شکل زیر را در نظر بگیرید



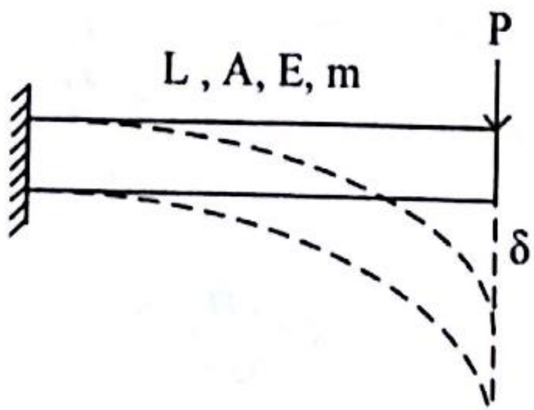

$$\delta = \frac{PL}{AE} \rightarrow k = \frac{p}{\delta} = \frac{AE}{L}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{AE}{mL}}$$

# ارتعاشات آزاد
## سیستم های یک درجه آزادی

- روش نیوتن

**ارتعاشات عرضی:** ارتعاشات عرضی در یک تیر یکسر گیردار که از انتهای آزاد تحت اثر نیروی متمرکز $P$ قرار گرفته است را در نظر بگیرید.




$$\delta = \frac{PL^3}{3EI} \rightarrow k = \frac{P}{\delta} = \frac{3EI}{L^3}$$

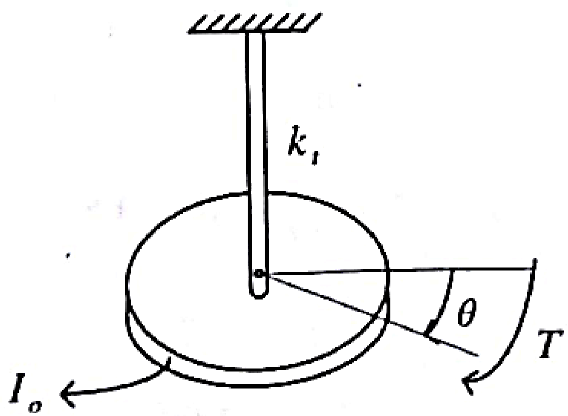
$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{3EI}{mL^3}}$$

# ارتعاشات آزاد

## سیستم های یک درجه آزادی

- روش نیوتن

**ارتعاشات پیچشی:** دیسکی را که توسط میله ای به طول $L$ آویزان شده است را در نظر بگیرید. فرض کنید که تغییر مکان زاویه ای کوچک به دیسک وارد شده و رها گردد. فرکانس طبیعی و معادله حرکت دیسک بصورت زیر بدست می‌آیند




**رابطه اویلر:**

$$\sum M_0 = I_0 \alpha$$

$$-M = I_0\ddot{\theta} \rightarrow -k_t\theta = I_0\ddot{\theta}$$

$$I_0\ddot{\theta} + k_t\theta = 0 \rightarrow \ddot{\theta} + \frac{k_t}{I_0}\theta = 0$$

# ارتعاشات آزاد

## سیستم های یک درجه آزادی

- روش نیوتن

از مقاومت مصالح می دانیم که:

$$\theta = \frac{ML}{GJ}$$

$$k_t = \frac{M}{\theta} = \frac{GJ}{L}\left( J = \frac{\pi d^4}{32} \text{ برای دیسک} \right)$$

معادله حرکت : $\ddot{\theta} + \frac{GJ}{LI_0}\theta = 0$

فرم استاندارد معادله حرکت برای سیستم نامیرا:

$$\ddot{\theta} + \omega_n^2\theta = 0 \rightarrow \omega_n^2 = \frac{GJ}{LI_0} \rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{GJ}{LI_0}} = \sqrt{\frac{k_t}{I_0}}$$

$$\theta(t) = \frac{\dot{\theta}}{\omega_n}\sin \omega_n t + \theta_0 \cos \omega_n t$$

# ارتعاشات آزاد
## سیستم های یک درجه آزادی

- روش نیوتن
  - مثال:

۱-۲ جرم یک کیلوگرمی توسط یک فنر به سختی ۰/۶ N/mm اویزان شده است. تعیین کنید.
الف) فرکانس طبیعی و ب) جابجایی استاتیکی آن را

حل:

$m = ۱\ \text{kg}$

$k = ۰/۶\ \text{N/mm}$

$\omega_n = ?$

$\delta_{st} = ?$

الف) جواب

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{۶۰۰}{۱}} = ۲۴/۵\ \text{rad/s}$$

ب)

$$mg = k\delta_{st}$$

$$\delta_{st} = \frac{mg}{k} = \frac{۱(۹/۸۱)}{۶۰۰} = ۰/۰۱۶۳۵\ \text{m}$$

جواب

$$\delta_{st} = ۱۶/۳۵\ \text{mm}$$

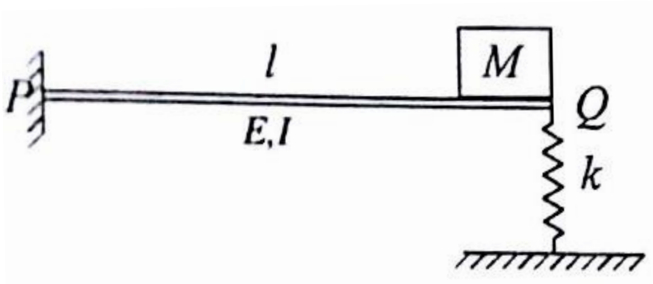
# ارتعاشات آزاد
## سیستم های یک درجه آزادی

- روش نیوتن
- مث

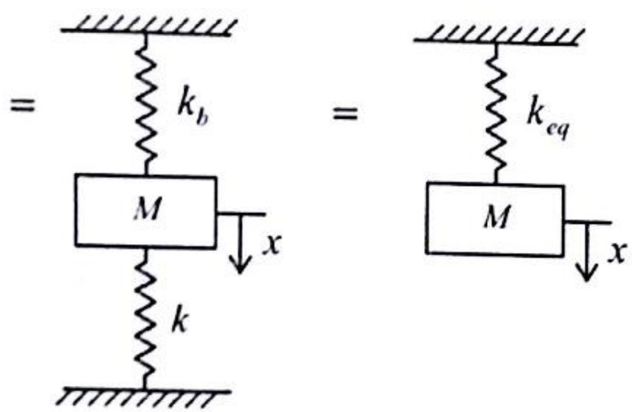
۲-۲ تیر یک سر گیردار $PQ$ بـه طـول $l$ در $P$ ثابـت شده و در $Q$ به جرم $M$ و فنر $k$ متصل شده است.

الف) معادله دیفرانسیل حرکت را بـرای حرکـت قـائم کوچک $M$ بدست آورید.

ب) رابطه‌ای برای فرکانس نوسان پیدا کنید.




حل: الف)




$$k_b=\frac{۳EI}{l^۳}$$

$$k_{eq}=k_b+k=\frac{۳EI}{l^۳}+k$$

معادله دیفرانسیل $\quad M\ddot{x}+k_{eq}x=۰$

$$M\ddot{x}+\left(\frac{۳EI}{l^۳}+k\right)x=۰$$

جواب $\quad \ddot{x}+\frac{kl^۳+۳EI}{Ml^۳}x=۰$

# ارتعاشات آزاد
## سیستم های یک درجه آزادی

- روش نیوتن
  - مثال:

ب)

جواب

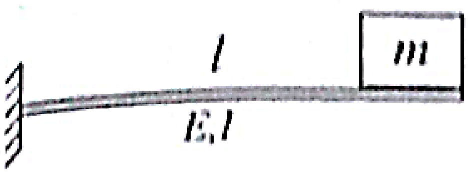
$$\rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{M}} \quad , \quad f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{kl^3 + 3EI}{Ml^3}}$$

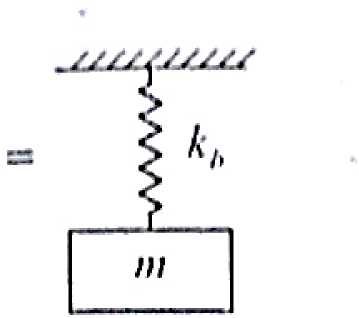
# ارتعاشات آزاد

## سیستم های یک درجه آزادی

- روش نیوتن
  - مثال:




۳-۲ فرکانس طبیعی جرم $m$ در انتهای تیر یک سر گیردار به طول $l$ و جرم ناچیز را بدست آورید.




حل:

$$k_b = \frac{۳EI}{l^۳}$$

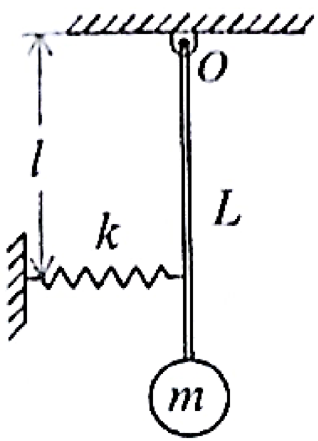
جواب
$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_b}{m}} = \sqrt{\frac{۳EI}{ml^۳}}$$

# ارتعاشات آزاد
## سیستم های یک درجه آزادی

- روش نیوتن
- مثال: ۲-۴ در شکل پاندول ساده به فنری به سختی $k$ متصل شده است.

الف) معادله دیفرانسیل حرکت سیستم را پیدا کنید.

ب) فرکانس طبیعی نوسان را بدست آورید.



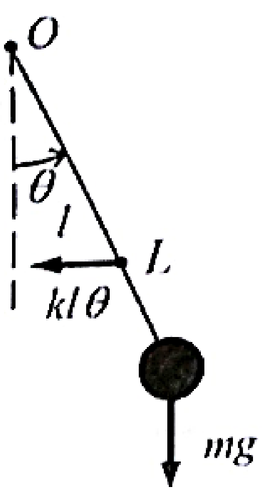

**حل:** با فرض کوچک بودن $\theta$ می‌توان $\sin\theta \approx \theta$ و $\cos\theta \approx ۱$ گرفت.

الف) گشتاور حول $O$ را طبق رابطه نیوتن ـ اویلر می‌نویسیم.

$$\Sigma M_O = I_O \ddot{\theta} \quad ، \quad I_O = mL^۲$$

$$-mgL\theta - kl^۲\theta = mL^۲\ddot{\theta}$$

جواب $$\rightarrow mL^۲\ddot{\theta} + (kl^۲ + mgL)\theta = ۰$$




ب) $$\omega_n = \sqrt{\frac{kl^۲ + mgL}{mL^۲}}$$

جواب $$\rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{kl^۲}{mL^۲} + \frac{g}{L}}$$

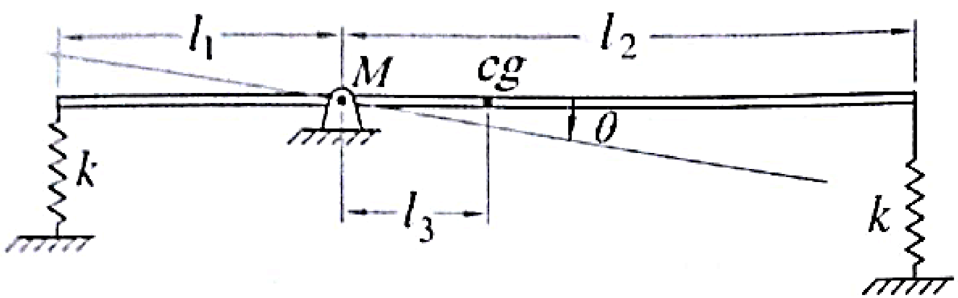
# ارتعاشات آزاد
## سیستم های یک درجه آزادی

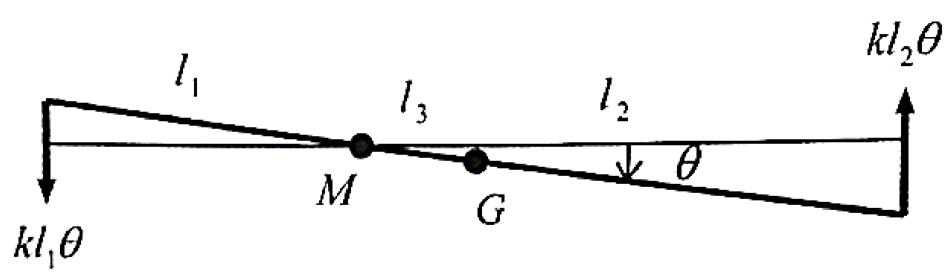
- روش نیوتن
  - مثال:

✓ ۵-۲ میله یکنواخت افقی به جرم $m$ و ممان اینرسی $I_M = J$ در نقطه $M$ لولا شده و دو انتهای آن روی فنرهایی به سختی $k$ مطابق شکل قرار گرفته است.

الف) معادله دیفرانسیل حرکت را پیدا کنید.

ب) فرکانس نوسان میله را بدست آورید.



# ارتعاشات آزاد

## سیستم های یک درجه آزادی

- روش نیوتن
  - مثال:

**حل:** با فرض کوچک بودن $\theta$ و گشتاور گیری حول $M$ داریم:

الف)

$$\Sigma M_M = I_M \ddot{\theta} \quad , \quad I_M = J$$

$$-kl_2^2\theta - kl_1^2\theta = J\ddot{\theta}$$

جواب

$$\rightarrow J\ddot{\theta} + k(l_1^2 + l_2^2)\theta = 0$$

ب)

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k(l_1^2 + l_2^2)}{J}} \ \text{rad/s}$$

جواب

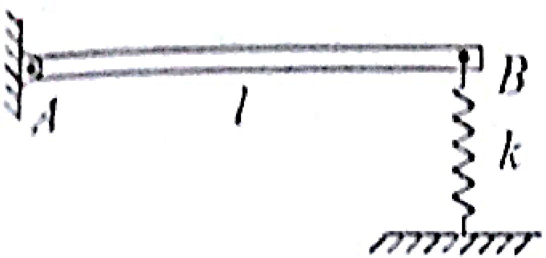
$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k(l_1^2 + l_2^2)}{J}} \ \text{Hz}$$

توجه: می‌توانیم ثابت کنیم که در حالت استاتیکی، گشتاور نیروی جاذبه $mg$ با مجموع گشتاورهای نیروهای فنر در حالت استاتیکی برابرند. در نتیجه در حالت دینامیکی از اضافه کردن این گشتاورها در رابطه نیوتن ـ اویلر صرفنظر کردیم.

# ارتعاشات آزاد
## سیستم های یک درجه آزادی

- روش نیوتن
  - مثال:

۶-۲ میله باریک یکنواختی به جرم $m$ و طول $l$ توسط پینی در $A$ مفصل شده و انتهای دیگرش در نقطه $B$ به فنری به سختی $k$ متصل شده است.

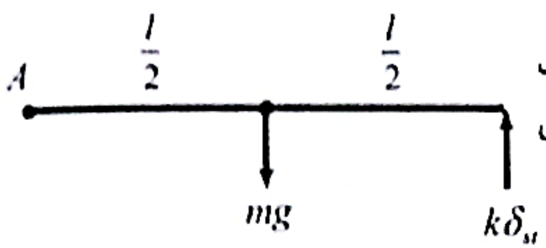



الف) معادله دیفرانسیل حرکت سیستم را پیدا کنید.

ب) فرکانس نوسان میله را حول وضعیت تعادلش بدست آورید.

حل: با فرض کوچک بودن $\theta$ نوسانات، در حالت استاتیکی داریم:

در وضعیت استاتیکی



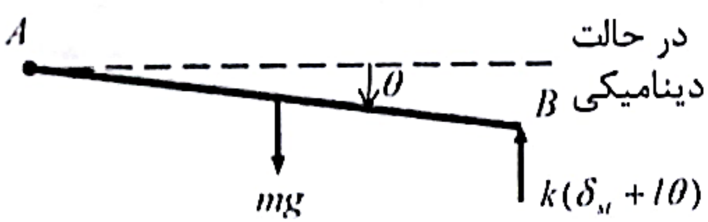

$$\sum M_A = 0$$

$$mg\frac{l}{2} - k\delta_{st}l = 0 \qquad (1)$$

در حالت دینامیکی:

$$\sum M_A = I_A\ddot{\theta}$$

در حالت دینامیکی




$$+mg\frac{l}{2} - k(\delta_{st} + l\theta)l = I_A\ddot{\theta} \text{ ،} \quad I_A = \frac{1}{3}ml^2$$

# ارتعاشات آزاد
## سیستم های یک درجه آزادی

- روش نیوتن
  - مثال:

با توجه به رابطه (۱) دیده می‌شود در معادله دینامیکی گشتاور نیروهای جاذبه با گشتاور نیروی فنر در حالت استاتیکی حذف می‌گردند. در نتیجه:

$$-kl^{۲}\theta = \frac{۱}{۳}ml^{۲}\ddot{\theta}$$

جواب

$$\rightarrow \frac{۱}{۳}m\ddot{\theta} + k\theta = ۰$$

فرکانس طبیعی

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{\frac{m}{۳}}} = \sqrt{\frac{۳k}{m}} \text{ rad/s}$$

فرکانس نوسان

$$\rightarrow f_n = \frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{۳k}{m}} \text{ Hz}$$

# ارتعاشات آزاد
## سیستم های یک درجه آزادی

- روش نیوتن
  - مثال:

۲-۷ جرم یک کیلوگرمی توسط فنری به سختی ۵۰۰ N/m آویزان شده است. جرم از وضعیت تعادلش به اندازه ۰/۱ m پایین کشیده شده و رها می‌گردد. تعیین کنید:

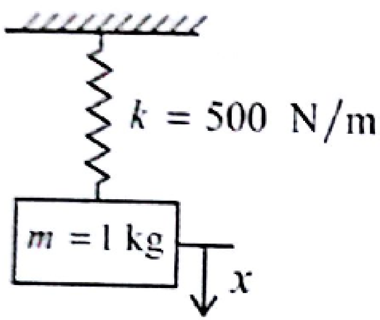
الف) معادله دیفرانسیل حرکت سیستم

ب) فرکانس طبیعی سیستم

ج) پاسخ سیستم به صورت تابعی از زمان

د) انرژی کل سیستم

حل:




$$x(0) = 0/1 \text{ m}$$

$$\dot{x}(0) = 0$$

الف) $$m\ddot{x} + kx = 0$$

جواب $$\rightarrow \ddot{x} + 500x = 0$$

# ارتعاشات آزاد
## سیستم های یک درجه آزادی

- روش نیوتن
- مثال:

ب)

جواب

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{۵۰۰} = ۲۲/۳۶۰۷ \text{ rad/s}$$

ج)

$$x = A\sin(\omega_n t + \psi)$$

$$A = ۰/۱ \quad ، \quad \omega_n = ۲۲/۳۶۰۷$$

$$\dot{x} = A\omega_n \cos(\omega_n t + \psi) = A\omega_n(\cos\omega_n t \cos\psi - \sin\omega_n t \sin\psi)$$

$$t = ۰ \quad , \quad \dot{x}(۰) = ۰ = A\omega_n \cos\psi \rightarrow \psi = \frac{\pi}{۲}$$

جواب

$$x = ۰/۱\sin\left(۲۲/۳۶۰۷t + \frac{\pi}{۲}\right)$$

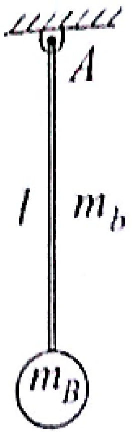
د) جواب

$$E = \frac{۱}{۲}kx_۰^۲ = \frac{۱}{۲}(۵۰۰)(۰/۱)^۲ = ۲/۵ \text{ J}$$

# ارتعاشات آزاد

## سیستم های یک درجه آزادی

- روش نیوتن
  - مثال:



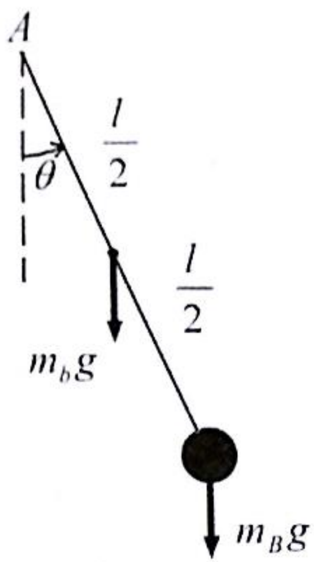

**۸-۲** پاندولی به شکل زیر دارای جرم میله $m_b$ و جرم گوی $m_B$ می‌باشد. تعیین کنید:

الف) معادله دیفرانسیل حرکت

ب) فرکانس نوسانات کوچک پاندول

ج) پریود نوسانات کوچک پاندول

**حل:** با در نظر گرفتن $\theta$ کوچک از روابط دینامیکی گشتاور استفاده می‌کنیم.




الف)

$$\Sigma M_A = I_A \ddot{\theta}$$

$$I_A = \frac{۱}{۳} m_b l^۲ + m_B l^۲ = l^۲ \left( \frac{۱}{۳} m_b + m_B \right)$$

$$-m_b g \frac{l}{۲} \theta - m_B g l \theta = l^۲ \left( \frac{۱}{۳} m_b + m_B \right) \ddot{\theta}$$

جواب

$$\left( \frac{۱}{۳} m_b + m_B \right) \ddot{\theta} + \left( \frac{۱}{۲} m_b + m_B \right) \frac{g}{l} \theta = ۰$$

# ارتعاشات آزاد

## سیستم های یک درجه آزادی

- روش نیوتن
  - مثال:

ب)

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{2}m_b + m_B\right)\frac{g}{l}}{\frac{1}{3}m_b + m_B}}$$

جواب

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3g(m_b + 2m_B)}{2l(m_b + 3m_B)}} \quad \text{Hz}$$

ج)

جواب

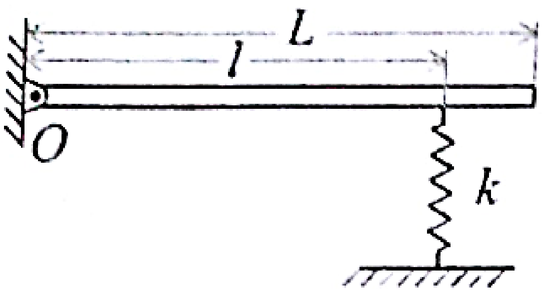
$$\tau = \frac{1}{f_n} = 2\pi\sqrt{\frac{2l(m_b + 3m_B)}{3g(m_b + 2m_B)}} \quad \text{s}$$

# ارتعاشات آزاد

## سیستم های یک درجه آزادی

- روش نیوتن
  - مثال:

۲-۹ در شکل، میله باریک یکنواختی به جرم $m$ و طول $L$ در نقطه $O$ لولا شده و توسط فنری به سختی $k$ نگهداشته شده است. میله در موقعیت افقی در تعادل استاتیکی خود می‌باشد. بر اثر نوسانات زاویه‌ای کوچک میله، تعیین کنید:



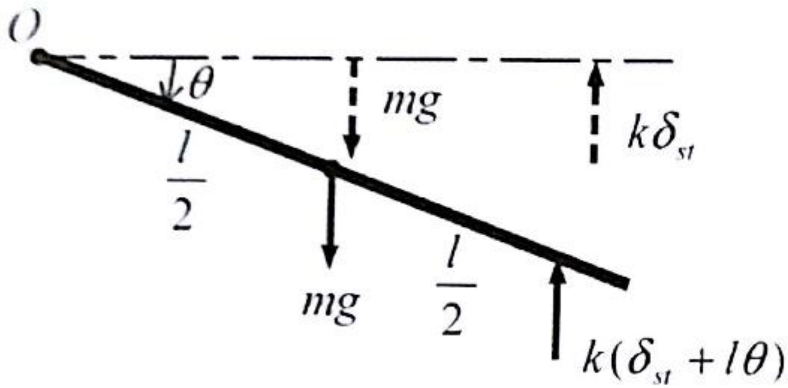

الف) معادله دیفرانسیل حرکت سیستم

ب) فرکانس نوسان

# ارتعاشات آزاد

## سیستم های یک درجه آزادی

- روش نیوتن
  - مثال:




**حل:** در حالت استاتیکی داریم:

الف) $\Sigma M_O = ۰$

(۱) $mg\frac{L}{۲} - k\delta_{st} l = ۰$

در حالت دینامیکی:

$\Sigma M_O = I_O \ddot{\theta}$ ، $I_O = \frac{۱}{۳} m L^۲$

$mg\frac{L}{۲} - k(\delta_{st} + l\theta) l = \frac{۱}{۳} m L^۲ \ddot{\theta}$

# ارتعاشات آزاد

## سیستم های یک درجه آزادی

- روش نیوتن
  - مثال:

با استفاده از رابطه (۱) که نشان می‌دهد گشتاور نیروی جاذبه میله در حالت استاتیکی با گشتاور نیروی فنر در تعادل استاتیکی یکدیگر را خنثی می‌کنند، داریم:

$$\rightarrow \frac{۱}{۳} m L^{۲} \ddot{\theta} + k l^{۲} \theta = ۰$$

جواب

$$\ddot{\theta} + ۳ \frac{k l^{۲}}{m L^{۲}} \theta = ۰$$

ب)

$$\omega_n = \sqrt{\frac{۳k}{m} \frac{l^{۲}}{L^{۲}}}$$

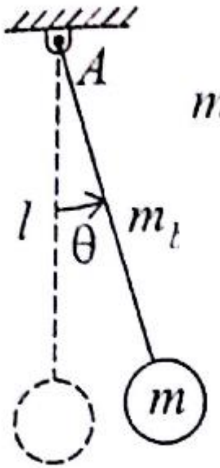
جواب

$$f_n = \frac{\omega_n}{۲\pi} = \frac{۱}{۲\pi} \frac{l}{L} \sqrt{\frac{۳k}{m}} \quad \text{Hz}$$

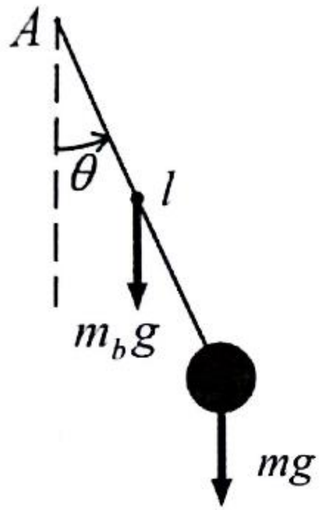
# ارتعاشات آزاد

## سیستم های یک درجه آزادی

- روش نیوتن
- مثال: ۱۰-۲ فرکانس نوسانات کوچک پاندول ساده شکل زیر را برای الف) جرم میله $m_b$ قابل صرفنظر کردن باشد و ب) جرم $m_b$ قابل صرفنظر کردن نباشد، بدست آورید.




حل:




$$\Sigma M_A = I_A \ddot{\theta}$$

$$I_A = \frac{1}{3} m_b l^2 + m l^2$$

الف) $m_b = 0$

$$-mgl\theta = ml^2 \ddot{\theta}$$

$$\rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

جواب $$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{Hz}$$

# ارتعاشات آزاد
## سیستم های یک درجه آزادی

- روش نیوتن
  - مثال:

ب) $m_b \neq ۰$

$$-mgl\theta - m_b g\frac{l}{۲}\theta = \left(\frac{۱}{۳}m_b + m\right)l^۲\ddot{\theta}$$

$$\rightarrow \left(\frac{۱}{۳}m_b + m\right)\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\left(\frac{۱}{۲}m_b + m\right)\theta = ۰$$

جواب

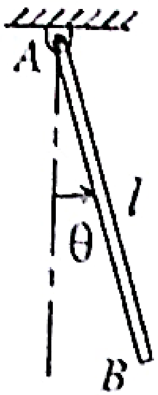
$$f_n = \frac{\omega_n}{۲\pi} = \frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{۳g(m_b + ۲m)}{۲l(m_b + ۳m)}} \quad \text{Hz}$$

# ارتعاشات آزاد
## سیستم های یک درجه آزادی

- روش نیوتن
- مثال: ۱۱-۲ میله باریک یکنواخت $AB$ به طول $l$ و جرم $m$ در نقطه $A$ لولا شده است. تعیین کنید:

الف) معادله دیفرانسیل نوسانات میله

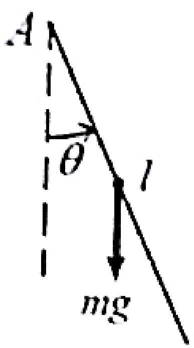
ب) پریود نوسانات کوچک میله




حل:

$$\Sigma M_A = I_A \ddot{\theta}$$

$$I_A = \frac{۱}{۳} m l^{۲}$$




$$\rightarrow \; -mg\frac{l}{۲}\theta = \frac{۱}{۳} m l^{۲} \ddot{\theta}$$

$$\rightarrow \; \ddot{\theta} + \frac{۳g}{۲l}\theta = ۰$$

جواب

$$\omega_n = \sqrt{\frac{۳g}{۲l}} \text{ rad/s} \quad ، \quad \tau = \frac{۲\pi}{\omega_n} = ۲\pi\sqrt{\frac{۲l}{۳g}} \text{ s}$$

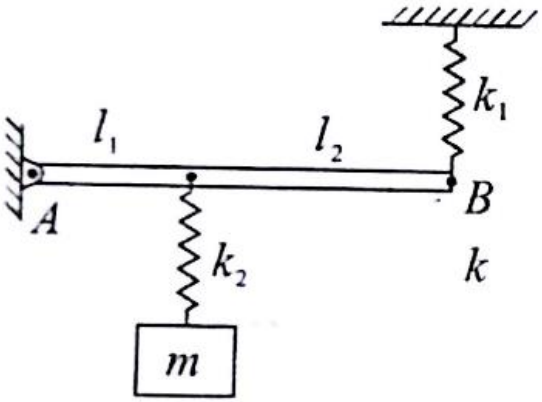
جواب

# ارتعاشات آزاد

## سیستم های یک درجه آزادی

- روش نیوتن

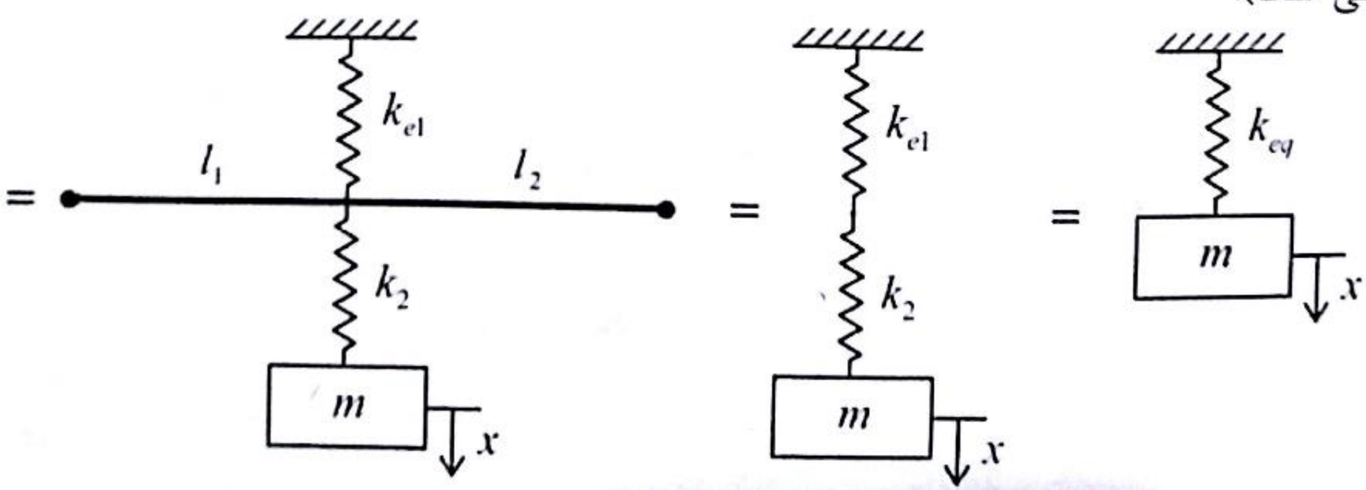
- مثال: ۱۲-۲ در شکل زیر میله باریک صلب بدون جرم $AB$ در نقطه $A$ لولا شده است. برای حرکت قائم جرم $m$ تعیین کنید:




الف) معادله دیفرانسیل حرکت

ب) فرکانس نوسانات کوچک میله

**حل:** در حالت استاتیکی اگر جای فنر $k_1$ را با $k_{e_1}$ عوض کنیم برای $k_{e_1}$ جدید خواهیم داشت (گشتاور حول $A$ در دو حالت برای آنها یکی است).



# ارتعاشات آزاد

## سیستم های یک درجه آزادی

- روش نیوتن
  - مثال:

$$k_1 l^2 = k_{e_1} l_1^2 \rightarrow k_{e_1} = k_1 \left(\frac{l}{l_1}\right)^2 \quad ، \quad l = l_1 + l_2$$

حال مجموع دو فنر سری $k_{e_1}$ و $k_2$ را حساب می‌کنیم.

$$k_{eq} = \frac{k_{e_1} k_2}{k_{e_1} + k_2} = \frac{k_1 \left(\frac{l}{l_1}\right)^2 k_2}{k_1 \left(\frac{l}{l_1}\right)^2 + k_2} = \frac{k_1 k_2 l^2}{k_1 l^2 + k_2 l_1^2}$$

و بالاخره برای سیستم نهایی یک درجه آزادی داریم:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = \sqrt{\frac{k_1 k_2 l^2}{m(k_1 l^2 + k_2 l_1^2)}}$$

# ارتعاشات آزاد

## سیستم های یک درجه آزادی

- روش نیوتن
  - مثال:

الف)

جواب

$$m\ddot{x} + k_{eq}x = 0$$

$$m\ddot{x} + \frac{k_1 k_2 l^2}{k_1 l^2 + k_2 l_1^2}x = 0$$

ب)

جواب

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 k_2 l^2}{(k_1 l^2 + k_2 l_1^2)m}} \quad \text{Hz}$$

توجه: در این مسئله باید فرض کنیم که میله صلب افقی بدون جرم بوده و فقط حرکت قائم مورد نظر می‌باشد.