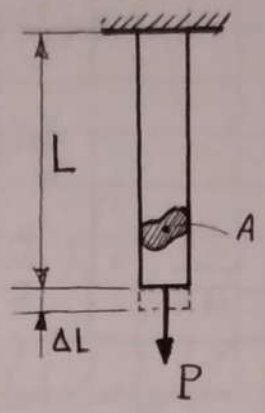
تغییر طول در میلهٔ یکنواخت :

- طبق قانون هوک و از رابطهٔ $\sigma = E\varepsilon$ می‌توان مقدار تغییر طول را برای یک میلهٔ یکنواخت (سطح مقطع ثابت ، نیروی ثابت ، جنس یکنواخت) که تحت تأثیر نیروی P قرار گرفته است ، در محدودهٔ رفتار خطی محاسبه کرد.

$$\sigma = E\varepsilon$$

$$\frac{P}{A} = E\left(\frac{\Delta L}{L}\right) \Rightarrow \boxed{\Delta L = \frac{PL}{EA}}$$



مثال : میلهٔ فولادی به قطر $5\,mm$ تحت چه نیرویی به اندازهٔ 0.2% افزایش طول می‌تواند داشته باشد ؟ مقدار E برای فولاد $2\times10^5\ MPa$ می‌باشد.

حل :

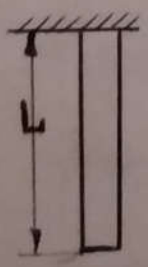
$$e\% = \left(\frac{L-L_0}{L_0}\right)\times 100$$

$$0.2 = \frac{\Delta L}{L_0}\times 100 \Rightarrow \varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} = 0.002 \Rightarrow \sigma = \frac{P}{A} = E\varepsilon = 2\times10^5 \times 0.002$$

$$\Rightarrow \sigma = 400 \qquad P = \sigma A = 400\left(\frac{25\pi}{4}\right) \cong 7854\,(N)$$

- اگر در یک عضو مکانیکی که تحت تأثیر نیروست ، نیرو ، سطح مقطع و جنس در طول های مختلف از آن متفاوت باشند تغییر طول کل عبارت از مجموع تغییر طول های جزئی است که بعنوان یک میلهٔ یکنواخت در نظر گرفته می‌شود ، محاسبه خواهد شد. این تغییرات می‌تواند به صورت گسسته باشد که در آن صورت از علامت $\sum_{i=1}^{n}\Delta l_i$ و به صورت پیوسته باشد که در آن صورت از علامت $\int_0^L d(\Delta L)$ استفاده خواهیم کرد.

مثال : تغییر طول یک میلهٔ یکنواخت را در اثر وزن خودش به دست آورید.



حل : از آنجا که جنس و سطح مقطع میله ثابت هستند لذا تنها عامل تغییر طول متغیر ، نیروی است که در نقاط مختلف فاصله از انتهای میله متفاوت می‌باشد.

در فاصله y از انتهای میله طول جزیی به اندازه dy در نظر گرفته می‌شود که در آن نیرو در بالا و پایین این المان یکسان می‌باشد. بنابراین با توجه به فرمول تغییر طول کلیه داشت می‌توان نوشت:

$$\frac{d\delta}{dy} = \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{AE}$$

($d\delta$ تغییر طول المان dy می‌باشد)

$$\Rightarrow d\delta = \frac{P\,dy}{EA} \qquad P = W_{(y)} = (L-y)\gamma A \qquad (\gamma: \text{وزن مخصوص جنس ماده است})$$

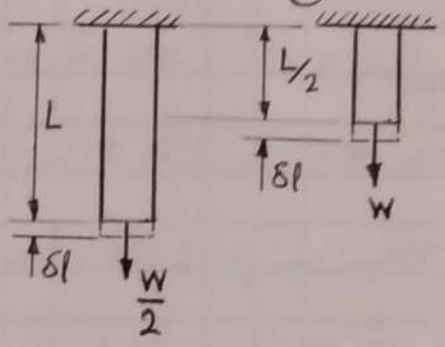
$$\Rightarrow d\delta = [(L-y)\gamma A\,dy] / EA = \frac{\gamma}{E}(L-y)dy$$

$$\Rightarrow \delta = \int d\delta = \int_0^L \frac{\gamma}{E}(L-y)dy = \frac{\gamma}{E}\left(Ly - \frac{y^2}{2}\right)\Big]_0^L = \frac{\gamma L^2}{2E}$$

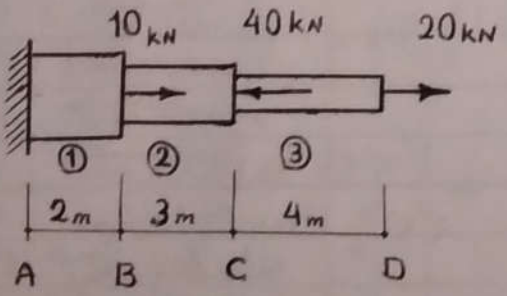
● ملاحظه می‌شود که تغییر طول یک میله کلیه داشت فقط به جنس و طول میله بستگی دارد.

اگر صورت و مخرج فرمول بدست آمده در A (مساحت سطح مقطع میله) ضرب شود خواهیم داشت:

$$\delta = \frac{\gamma L^2 A}{2EA} = \frac{(\gamma LA)L}{2EA} = \frac{WL}{2EA}$$



● مثال: تغییر مکان نقاط B و C و D در شکل مقابل را محاسبه کنید.



$E_1 = 70\,GPa$ $\quad A_1 = 80\,mm^2$

$E_2 = 105\,GPa$ $\quad A_2 = 50\,mm^2$

$E_3 = 200\,GPa$ $\quad A_3 = 30\,mm^2$

$$\Delta L_B = \frac{-10(10^3)(2000)}{(70\times10^3)\,80} = -3.571\,mm$$

- در مقطع AB تفاضل یا مجموع نیرو اعمال می‌شود.

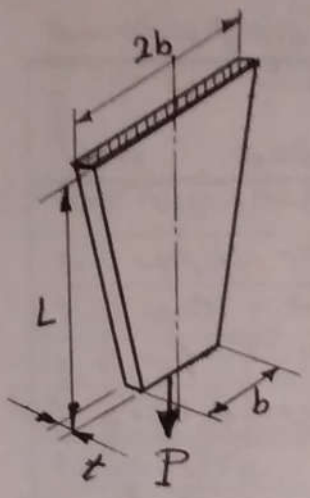
$$\Delta L_C = \Delta L_B + \Delta L_{BC} = -3.571 - \frac{20(10^3)(3000)}{105(10^3)\,50} = -3.571 - 11.428 \cong -15\,mm$$

- در مقطع BC مجموع دو نیروی 20 و 40 اعمال می‌شود.

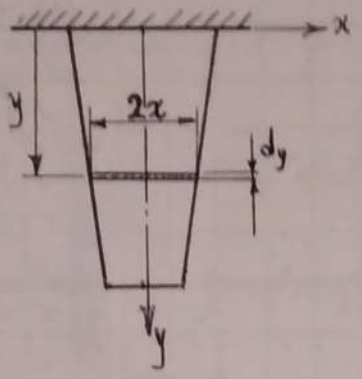
$$\Delta L_D = \Delta L_C + \Delta L_{CD} = -15\,mm + \frac{20(10^3)(4000)}{200(10^3)\,30} = -15 + 13.33 = -1.67\,mm$$

- در مقطع CD فقط نیروی 20 اعمال می‌شود.

مثال: تغییر طول سیله غیر یکنواخت شکل مقابل را در اثر نیروی ثابت P می یابید.



حل:



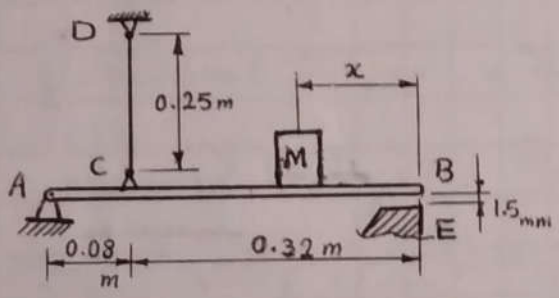
$$d\delta = \frac{P.dy}{E(2x.t)}$$

$$2x = 2\left[\frac{-b}{2L}y + b\right] = \left(2b - \frac{b}{L}y\right)$$

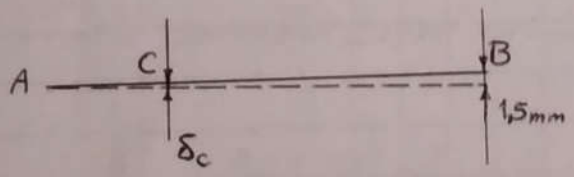
$$\delta = \frac{P}{Et}\int_0^L \frac{dy}{\left(2b-\frac{b}{L}y\right)} = \frac{-PL}{Ebt}\,Ln\left(2b-\frac{b}{L}y\right)\Big]_0^L$$

$$\delta = \frac{-PL}{Ebt}\,Ln\left(2b-\frac{b}{L}y\right)\Big]_0^L = \frac{PL}{Ebt}\,Ln(2) = 0.693\left(\frac{PL}{Ebt}\right)$$

مثال: طول سیم فولادی طوری تنظیم شده است که در حالت بارگذاری شکل زیر به اندازه $1.5\,mm$ بین میله ABC و نقطه ثابت E موجود است.



قطر سیم مذکور برابر $2\,mm$ است. مدول یانگ $E=200\,GPa$ است. موقعیت وزنه $M=20\,kg$ را طوری تعیین کنید که فاصله بین E و B به صفر برسد.



(یعنی سیم فولادی DC تغییر طولی به اندازه δ_c خواهد داشت)

$$\frac{\delta_c}{0.08} = \frac{1.5}{0.4} \Rightarrow \delta_c = \left(\frac{0.08}{0.4}\right)1.5 = 0.3\,mm$$

$$\Rightarrow 0.3 = \frac{F_c \times 0.25(10^3)}{200(10^3)\,\frac{\pi}{4}(2^2)} \Rightarrow F_c \cong 754\,(N)$$

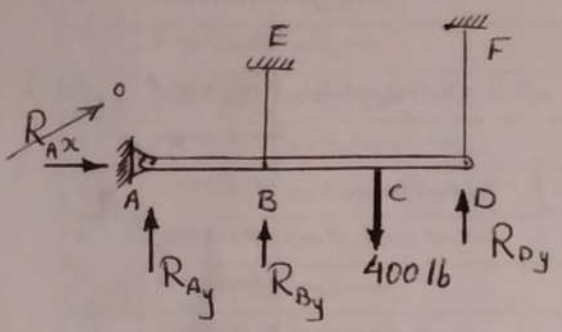
چون سیستم در حال تعادل استاتیکی است، لذا گشتاور نیروی F_c حول نقطه A، گشتاور نیروی وزن جرم M حول نقطه A با هم برابرند، در نتیجه خواهیم داشت:

$$0.08F_c = (0.4-x)Mg$$

$$0.08(754) = (0.4-x)\,20\times 9.81 \Rightarrow x = 0.0925\,m$$

حل مسایل نامعین استاتیکی از درجهٔ (۱)

در درس استاتیک به حل مسایل معین استاتیکی (تعداد مجهولات کمتر یا مساوی تعداد معادلات تعادل مستقل) پرداخته شد. در این درس به حل مسایل نامعین استاتیکی از درجهٔ ۱ پرداخته خواهد شد، مسایلی که تعداد مجهولات آن فقط یکی بیشتر از تعداد معادلات تعادل استاتیکی است (که مستقل از هم هستند)

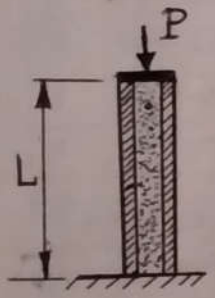


در شکل مقابل نیروهای عکس العمل تکیه گاهی همگی به موازات هم و در راستای y در نقاط A ، B ، D عمل می کنند. (نیروی افقی عکس العمل تکیه گاه لولایی A بدلیل عدم وجود نیروی خارجی افقی، صفر می باشد) تعداد معادلات مستقل برای این شکل با حذف ($\Sigma F_x = 0$) فقط ۲ می باشد در حالی که تعداد مجهولات ۳ می باشد.

معادلات تعادل : $\Sigma F_y = 0$ ، $\Sigma M_A = 0$

مجهولات : $R_{Ay} = ?$ ، $R_{By} = ?$ ، $R_{Dy} = ?$

در حل چنین مسایلی، علاوه بر معادلات تعادل تشکیل داده شده، یک معادلهٔ تغییر شکل هم با توجه به هندسه تغییر شکل (زاویه ای و یا خطی) در مسئله نوشته خواهد شد و با حل معادلات به دست آمده مجهولات مسئله به دست خواهند آمد.



مثال : یک میله مرکب (دارای مغز و پوسته) توسط یک صفحهٔ صلب نیروی فشاری P در انتهایش را متحمل می شود. اگر مدول الاستیسیته و سطح مقطع پوسته به ترتیب با E_s و A_s و نیز مدول الاستیسیته و سطح مقطع مغز میله با E_c و A_c نشان داده شود مطلوب است مقدار نیروی وارده به هرکدام از میله ی مغز و پوسته این میله مرکب ؟

حل : نیروی P در امتداد محور میله وارد می شود و در صورت حذف یکی از میله ها (مغز یا پوسته) باز هم تعادل استاتیکی برقرار است، لذا مسئله از نوع نامعین از درجه ۱ می باشد

معادلهٔ تعادل استاتیکی : $P = P_c + P_s$ (I) (P_s و P_c مجهولات مسئله اند)

معادلهٔ تغییر شکل : $\delta l_c = \delta l_s$ (II)

$$\delta_{lc} = \frac{P_c L}{E_c A_c} \quad , \quad \delta_s = \frac{P_s L}{E_s A_s} \Rightarrow \frac{P_c L}{A_c E_c} = \frac{P_s L}{E_s A_s} \Rightarrow \boxed{P_c = \frac{E_c A_c}{E_s A_s} P_s} \quad (III)$$

با حل دو معادلهٔ I و III مقادیر P_c و P_s به ترتیب زیر محاسبه می‌شوند.

$$P_c = \left(\frac{E_c A_c}{E_s A_s + E_c A_c}\right) P \quad , \quad P_s = \left(\frac{E_s A_s}{E_s A_s + E_c A_c}\right) P$$

- اگر مقدار نیروی $P = 10\ kN$، طول میله $40\ cm$، قطر میلهٔ مفرد $2\ cm$ و از جنس فولاد ($E_c = 200\ GPa$) قطر میلهٔ پوسته (قطر خارجی) $6\ cm$ و از جنس آلومینیم باشد ($E_s = 70\ GPa$) مطلوب است:

الف) مقدار نیروی وارده به هرکدام از میله‌ها

ب) تنش در هرکدام از میله‌ها

ج) تغییر طول میله

(الف)

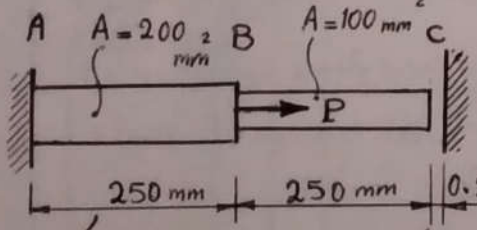
$$A_c = \frac{\pi}{4}(20)^2 = 100\pi\ mm^2$$

$$A_s = \frac{\pi}{4}(60^2 - 20^2) = 800\pi\ mm^2$$

$$P_c = \frac{-200(100\pi)10000}{70(800\pi) + 200(100\pi)} = -2631.6\ (N) \quad , \quad P_s = \frac{-70(800\pi)10000}{70(800\pi) + 200(100\pi)} = -7368.4\ (N)$$

(ب) $$\sigma_c = \frac{P_c}{A_c} = \frac{-2631.6}{100\pi} = -8.37\ (MPa) \quad , \quad \sigma_s = \frac{P_s}{A_s} = \frac{-7368.4}{800\pi} = -2.93\ MPa$$

ج) $$\delta_{lc} = \delta_{ls} = \frac{P_c L_c}{E_c A_c} = \frac{-2631.6(400)}{200(10^3)(100\pi)} = -0.0167\ mm$$



مثال: بر میلهٔ دو مقطعی شکل مقابل نیروی به اندازهٔ $50\ kN$ وارد می‌شود. انتهای میله در نقطهٔ C با تکیه‌گاه فاصله‌ای به اندازهٔ 0.2 میلی‌متر دارد. مطلوب است نیروی تکیه‌گاهی در نقاط A و C - تنش در هرکدام از میله‌ها - تغییر طول هرکدام از میله‌ها. (جنس میله از فولاد $E = 200\ GPa$)

حل: $$\Delta L = \frac{(50\times10^3)250}{(200\times10^3)200} = 0.3125\ mm$$: تغییر طول کل میله در صورت عدم وجود تکیه‌گاه C

بنابراین در تکیه‌گاه C نیروی تکیه‌گاهی وجود خواهد داشت

- اگر تکیه‌گاه C وجودی نداشت میله به اندازه $0.3125\ mm$ تغییر طول می‌داد، حال که این تکیه‌گاه وجود دارد تکیه‌گاه C با اعمال نیرویی از اضافه تغییر طول یعنی $(0.3125 - 0.2)$ جلوگیری می‌کند. بنابراین اگر تکیه‌گاه C حذف ولی نیروی عکس‌العمل R_c اعمال شود می‌توان نوشت:

معادله تغییر شکل:

$$\Delta L_P - \Delta L_R = 0.2$$

ΔL_P: تغییر طول میله ناشی از اعمال بار خارجی

ΔL_R: تغییر طول میله ناشی از اعمال بار یا نیروی تکیه‌گاه حذف شده.

$$0.3125 - \Delta L_R = 0.2$$

$$\Rightarrow \Delta L_R = \frac{RL}{E}\left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2}\right) = \frac{R_c(250)}{200(10^3)}\left[\frac{1}{200} + \frac{1}{100}\right] = 0.1125\ mm$$

$$\Rightarrow \underline{R_c = 6000\ (N)}$$

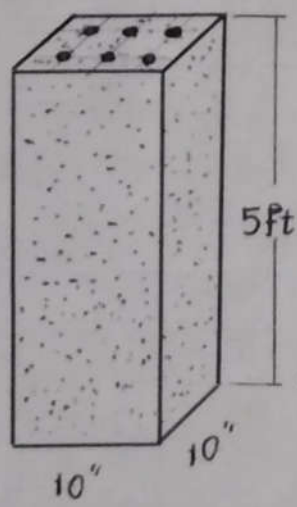
از طرفی برای معادله تعادل: $R_c + R_A = 50000 \Rightarrow \underline{R_A = 50000 - 6000 = 44000\ (N)}$

$$\sigma_{AB} = \frac{R_A}{A_{AB}} = \frac{44000}{200} = 220\ (MPa) \quad , \quad \sigma_{BC} = \frac{R_c}{A_{BC}} = \frac{-6000}{100} = -60\ (MPa)$$

$$\Delta L_{AB} = \frac{R_A L_{AB}}{E A_{AB}} = \frac{(44000)(250)}{(200)(10^3)\,200} = 0.275\ mm \quad , \quad \Delta L_{BC} = \frac{(-6000)(250)}{(200\times10^3)(100)} = -0.075\ mm$$

مثال: یک ستون بتنی به ارتفاع $5\ ft$ توسط تسمه میله فولادی به قطر $\left(\frac{7}{8}\right)''$ تقویت شده است. می‌دانیم $E_s = 30\times10^6\ psi$ (فولاد)، $E_c = 3.6\times10^6\ psi$ (بتن).

اگر بار گرانشی معادل $200\ kips$ بر این ستون وارد شود، مقدار تنش‌های ایجاد شده در فولاد و بتن را محاسبه کنید.



معادله تعادل استاتیک:

$$\begin{cases} 2\times10^5\ lb = P_s + P_c \quad (I) \\ \Delta l_s = \Delta l_c \Rightarrow \dfrac{P_s L_s}{E_s A_s} = \dfrac{P_c L_c}{E_c A_c} \quad : (L_c = L_s) \quad (II) \end{cases}$$

معادله تغییر شکل:

$$(II) \Rightarrow \frac{P_s}{E_s A_s} = \frac{P_c}{E_c A_c} \Rightarrow \frac{P_s}{(30\times10^6)\,6\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{7}{8}\right)^2} = \frac{P_c}{(3.6\times10^6)\left[10^2 - 6\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{7}{8}\right)^2\right]}$$

$$\Rightarrow P_s \cong 0.312\, P_c \quad (III)$$

با استفاده از معادلهٔ III در معادلهٔ I خواهیم داشت :

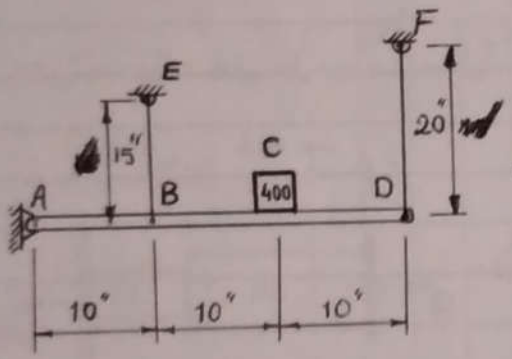
$$0.312 P_c + P_c = 2\times10^5 \text{ lb}$$

$$\Rightarrow P_c = 152439.0 \text{ lb} \simeq 152.44 \text{ kips} \qquad \Rightarrow P_s = 200 - 152.44 = 47.56 \text{ kips}$$

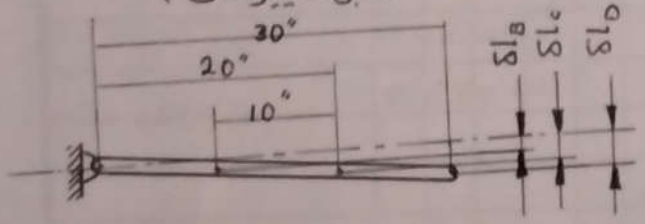
$$\sigma_s = \frac{P_s}{A_s} = \frac{47.56\times10^3}{\left[\frac{\pi}{4}\left(\frac{7}{8}\right)^2 \times 6\right]} = 13182.1 \text{ Psi} \quad , \quad \sigma_c = \frac{P_c}{A_c} = \frac{152.44\times10^3}{\left[10^2 - 6\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{7}{8}\right)^2\right]} \cong 1581.5 \text{ Psi}$$

مثال : قطر هریک از سیم های فولادی BE , DF برابر 0.1 in است ($E_s = 30\times10^6$ psi) میله ی صلب AD قبل از اعمال بار 400 lb بر نقطهٔ C از میله صلب ، بصورت افقی است . مطلوب است محاسبهٔ (a) مقدار کشش در میله ها

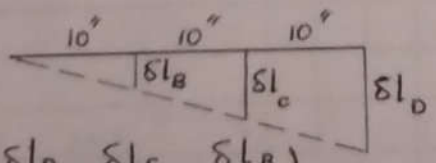
(b) مقدار جابجایی نقطهٔ C .



(قبل از تغییر مکان)



(بعد از تغییر مکان)



$$\left(\frac{\delta l_D}{30} = \frac{\delta l_C}{20} = \frac{\delta l_B}{10}\right)$$

معادلهٔ تعادل استاتیک : $\Sigma M_A = 0$

$$10 R_B - 400(20) + 30 R_D = 0 \quad (I)$$

معادلهٔ تغییر شکل : $\frac{\delta l_B}{10} = \frac{\delta l_D}{30}$ (II)

$$(II): \delta l_D = 3\delta l_B \Rightarrow \frac{R_D L_{FD}}{E_s A} = \frac{3 R_B L_{EB}}{E_s A}$$

از آنجا که مقادیر $E_s A$ برای هر دو سیم فولادی یکسان است لذا داریم :

$$: R_D(20) = 3(R_B \times 15)$$

$$\Rightarrow R_D = 2.25\, R_B \quad III$$

با استفاده از معادلهٔ III در معادلهٔ I خواهیم داشت :

$$: 10R_B + 30R_D = 8000 \Rightarrow 10R_B + 30(2.25R_B) = 8000 \Rightarrow \begin{cases} R_B = 103.225 \text{ lb} \\ R_D = 232.258 \text{ lb} \end{cases}$$

(جواب قسمت الف)