East Azarbaijan University of Technical & Vocational

دینامیک

جلسه دوم

مدرس:
دکتر علیرضا بابائی

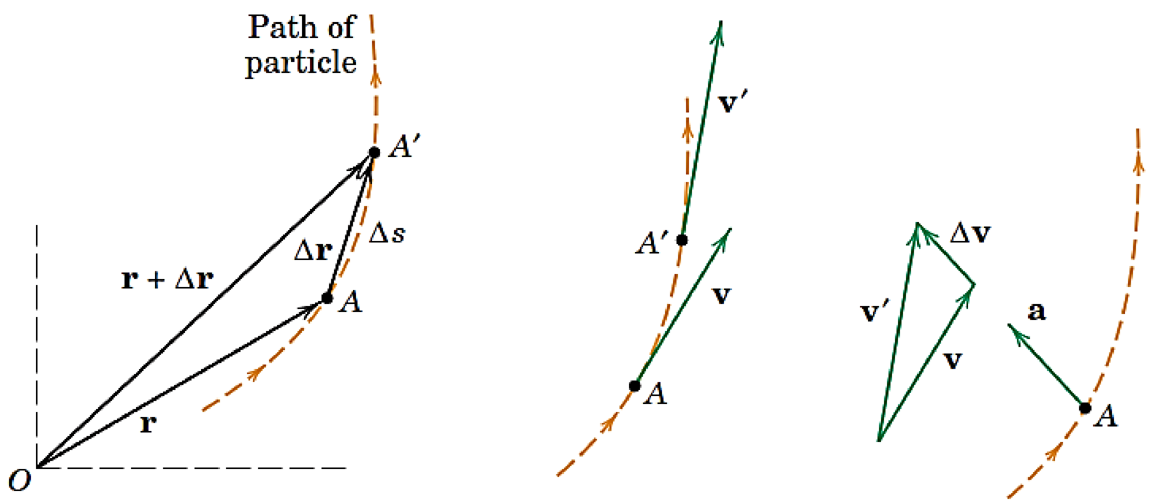
آموزشکده فنی شماره ۲ تبریز

بسم الله الرحمن الرحیم

سینماتیک ذرات

- حرکت منحنی الخط در صفحه:

اکنون حرکت پیوسته یک ذره را در امتداد یک منحنی در صفحه مطابق شکل ملاحظه نمایید. در زمان t ذره در موقعیت A قرار گرفته که توسط بردار موقعیت $\mathbf{r}$ که از مبدا ثابت مناسبی مانند O اندازه گیری شده، مشخص می‌گردد. اگر در زمان t ، هم اندازه و هم جهت $\mathbf{r}$ معلوم باشد در این صورت موقعیت ذره کاملاً مشخص می‌گردد. در زمان $t+\Delta t$ ، ذره در A' بوسیله بردار موقعیت $\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}$ مشخص می‌شود. البته توجه داریم که این ترکیب جمع برداریست، نه اسکالر. *جابجایی* ذره در مدت زمان Δt بردار $\Delta\mathbf{r}$ می‌باشد که تغییر برداری موقعیت بوده و مستقل از انتخاب مبدا می‌باشد. اگر مبدا مختصات نقطه دیگری بود، بردار موقعیت $\mathbf{r}$ تغییر می‌کرد، ولی $\Delta\mathbf{r}$ بدون تغییر می‌ماند. مسافت واقعی پیموده شده در طی حرکت ذره روی مسیر از A به A' ، طول اسکالر Δs است که در امتداد مسیر اندازه گیری می‌شود. از اینرو بین جابجایی برداری $\Delta\mathbf{r}$ و مسافت اسکالر Δs تمایز قائل می‌شویم.



سینماتیک ذرات

- حرکت منحنی الخط در صفحه:

سرعت

سرعت *متوسط* ذره بین A و A' توسط رابطه $\mathbf{v}_{av} = \Delta\mathbf{r} / \Delta t$ تعریف می‌گردد که برداریست هم جهت بردار $\Delta\mathbf{r}$ و اندازه‌اش مساوی اندازه $\Delta\mathbf{r}$ تقسیم بر Δt است. اندازه سرعت متوسط ذره بین A و A' خارج قسمت اسکالر $\Delta s/\Delta t$ است. واضح است که مقدار بردار سرعت متوسط و اندازه سرعت متوسط وقتی Δt کوچک شده و A و A' به هم نزدیک شوند، یکی می‌شوند.

وقتی فاصله زمانی به صفر میل کند، سرعت *لحظه‌ای* $\mathbf{v}$ ذره به صورت مقدار حدی سرعت متوسط تعریف می‌شود.

پس:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$$

ملاحظه می‌شود وقتی Δt به سمت صفر میل می‌کند، امتداد $\Delta\mathbf{r}$ به سمت مماس بر منحنی مسیر میل نموده و در نتیجه سرعت $\mathbf{v}$ همواره برداریست مماس بر مسیر.

$$\boxed{\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}}$$

سینماتیک ذرات

- حرکت منحنی الخط در صفحه:

شتاب

شتاب متوسط یک ذره بین A و A' برابر $\Delta\mathbf{v}/\Delta t$ است که جهتش در امتداد $\Delta\mathbf{v}$ می‌باشد. اندازه شتاب متوسط نیز برابر با اندازه $\Delta\mathbf{v}$ تقسیم بر Δt است. وقتی که فاصله زمانی به سمت صفر میل نماید، *شتاب لحظه‌ای* $\mathbf{a}$ یک ذره به صورت مقدار حدی شتاب میانگین تعریف می‌گردد. پس:

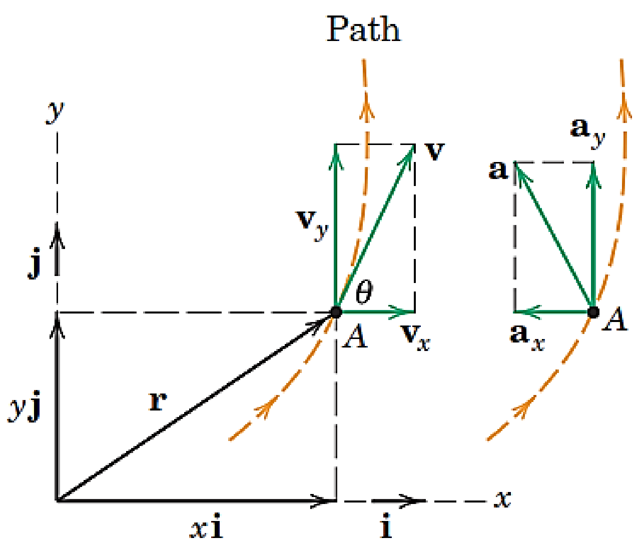
$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}$$

$$\boxed{\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}}}$$

هنگامیکه فاصله زمانی Δt کوچک شده و به صفر نزدیک می‌گردد، جهت تغییر $\Delta\mathbf{v}$ به تغییر دیفرانسیلی $d\mathbf{v}$ میل می‌کند و در نتیجه به $\mathbf{a}$ می‌رسیم. پس شتاب $\mathbf{a}$ ، مشمول اثر تغییر اندازه $\mathbf{v}$ و تغییر جهت $\mathbf{v}$ می‌گردد. بطور کلی واضح است که جهت شتاب یک ذره در حرکت منحنی الخط نه مماس بر مسیر است نه عمود بر آن. اما به هر حال مشاهده می‌کنیم که شتاب، مولفه‌ای عمود بر مسیر و به سوی مرکز انحنا دارد.

سینماتیک ذرات

- حرکت منحنی الخط در صفحه:
  - مختصات کارتزین



$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}$$

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j}$$

$$v^2 = {v_x}^2 + {v_y}^2 \qquad v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} \qquad \tan\theta = \frac{v_y}{v_x}$$

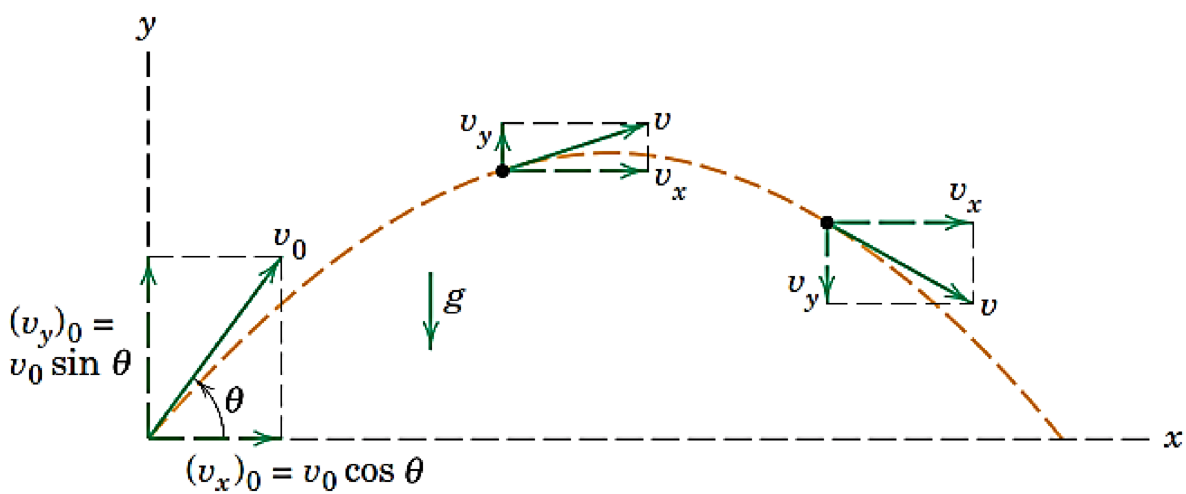
$$a^2 = {a_x}^2 + {a_y}^2 \qquad a = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2}$$

سینماتیک ذرات

- حرکت منحنی الخط در صفحه:
  - حرکت پرتابی

یکی از مهمترین کاربردهای تئوری سینماتیک دو بعدی مسئله حرکت پرتابه‌ها می‌باشد که برای طرح اولیه موضوع از مقاومت نیروهای آیرودینامیکی و تغییرات R زمین و چرخش آن صرفنظر کرده و فرض می‌کنیم که ارتفاع حرکت پرتابه‌ها از سطح زمین به قدری است که شتاب ثقل را می‌توان ثابت در نظر گرفت. با این فرضیات تحلیل حرکت جسم در مختصات کارتزین مفید خواهد بود. با در نظر گرفتن محورهای شکل ۸-۲ مولفه‌های شتاب عبارتند از:

$$a_x = 0 \qquad\qquad a_y = -g$$



سینماتیک ذرات

- حرکت منحنی الخط در صفحه:
  - حرکت پرتابی

$$v_x = (v_x)_0 \qquad v_y = (v_y)_0 - gt$$

$$x = x_0 + (v_x)_0 t \qquad y = y_0 + (v_y)_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v_y{}^2 = (v_y)_0{}^2 - 2g(y - y_0)$$

مدت زمان رسیدن به نقطه اوج

$$V_y = -gt + V_0 \sin\theta \Rightarrow 0 = -gt + V_0 \sin\theta$$

$$\boxed{t = \frac{V_0 \sin\theta}{g}}$$

مختصات نقطه اوج

$$y = y_0 + (V_0 \sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad t = \frac{V_0 \sin\theta}{g}$$

$$y = y_0 + (V_0 \sin\theta)\left(\frac{V_0 \sin\theta}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{V_0 \sin\theta}{g}\right)^2$$

$$\boxed{y = y_0 + \frac{(V_0 \sin\theta)^2}{2g}}$$

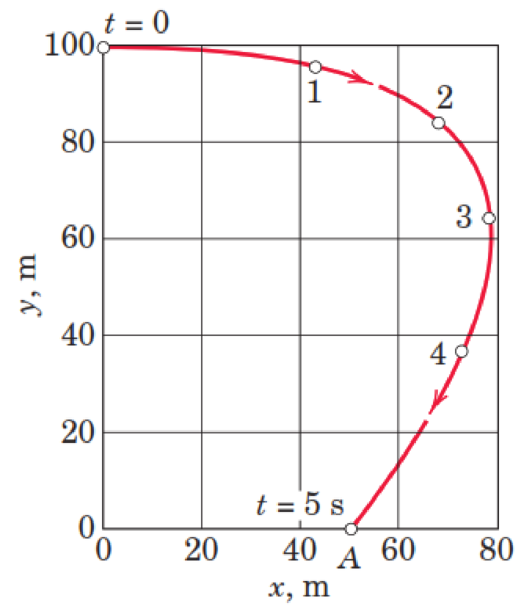
معادله مسیر

$$x = x_0 + (V_0 \cos\theta)t \qquad y = y_0 + (V_0 \sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$t = \frac{x - x_0}{V_0 \cos\theta} \qquad \boxed{y = y_0 + (x - x_0)\tan\theta - \frac{1}{2}g\left(\frac{x - x_0}{V_0 \cos\theta}\right)^2}$$

سینماتیک ذرات

- حرکت منحنی الخط در صفحه:
  - ه حرکت منحنی الخط ذره‌ای توسط $v_x = ۵۰-۱۶t$ و $y = ۱۰۰-۴t^۲$ تعریف شده که در آن v_x بر حسب متر بر ثانیه، y بر حسب متر و t بر حسب ثانیه می‌باشد. همچنین می‌دانیم که در $t = ۰$ ، $x = ۰$ می‌باشد. منحنی مسیر ذره را رسم نموده و موقعی که موقعیت $y = ۰$ می‌رسد، سرعت و شتاب را تعیین کنید.



$$\left[\int dx = \int v_x\, dt\right] \qquad \int_0^x dx = \int_0^t (50 - 16t)\, dt \qquad x = 50t - 8t^2 \text{ m}$$

$$[a_x = \dot{v}_x] \qquad a_x = \frac{d}{dt}(50 - 16t) \qquad a_x = -16 \text{ m/s}^2$$

$$[v_y = \dot{y}] \qquad v_y = \frac{d}{dt}(100 - 4t^2) \qquad v_y = -8t \text{ m/s}$$

$$[a_y = \dot{v}_y] \qquad a_y = \frac{d}{dt}(-8t) \qquad a_y = -8 \text{ m/s}^2$$

سینماتیک ذرات

- حرکت منحنی الخط در صفحه:
  - مثال:

$$y = 0,\ 0 = 100 - 4t^2, \text{ so } t = 5 \text{ s.}$$

$$v_x = 50 - 16(5) = -30 \text{ m/s}$$

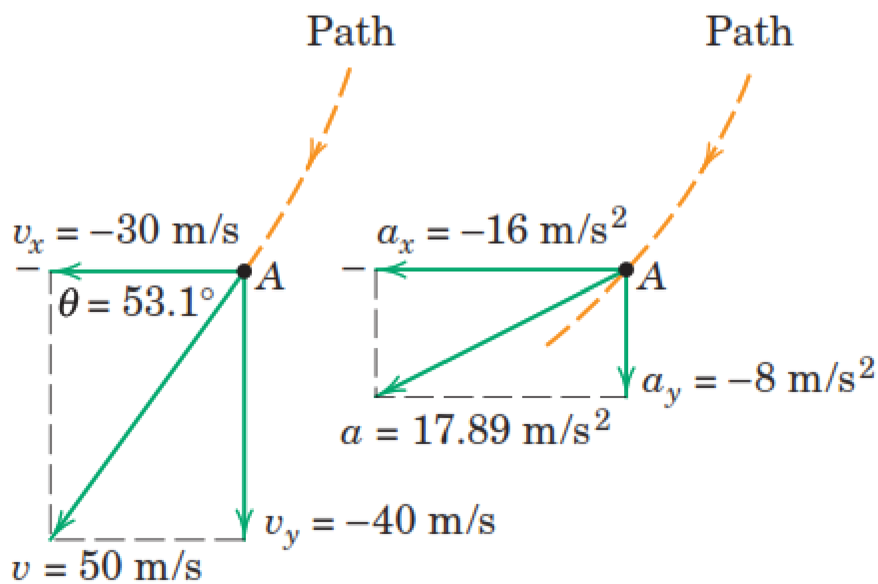
$$v_y = -8(5) = -40 \text{ m/s}$$

$$v = \sqrt{(-30)^2 + (-40)^2} = 50 \text{ m/s}$$

$$a = \sqrt{(-16)^2 + (-8)^2} = 17.89 \text{ m/s}^2$$

$$\mathbf{v} = -30\mathbf{i} - 40\mathbf{j} \text{ m/s}$$

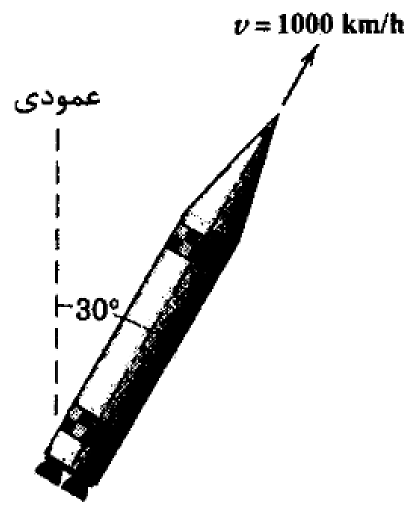
$$\mathbf{a} = -16\mathbf{i} - 8\mathbf{j} \text{ m/s}^2$$



سینماتیک ذرات

- حرکت منحنی الخط در صفحه:
  - مثال:

۶۸-۲ سوخت موشکی در موقعیت نشان داده شده تمام شده و بدون سوخت در بالای جو به حرکت خود ادامه می‌دهد. اگر سرعت موشک در این موقعیت ۱۰۰۰ km/h باشد، حداکثر ارتفاعی را که در زمان t متناظر برای رسیدن به این ارتفاع می‌پیماید، حساب کنید. شتاب ثقل در مدت پرواز ۹/۳۹ m/s^2 می‌باشد.



سینماتیک ذرات

- حرکت منحنی الخط در صفحه:
  - مثال:

$$v = 1000\ \frac{km}{h} = \frac{1000}{3,6}\ \frac{m}{s} = 278\ \frac{m}{s}$$

$$a_y = -9,39\ \frac{m}{s^2}$$

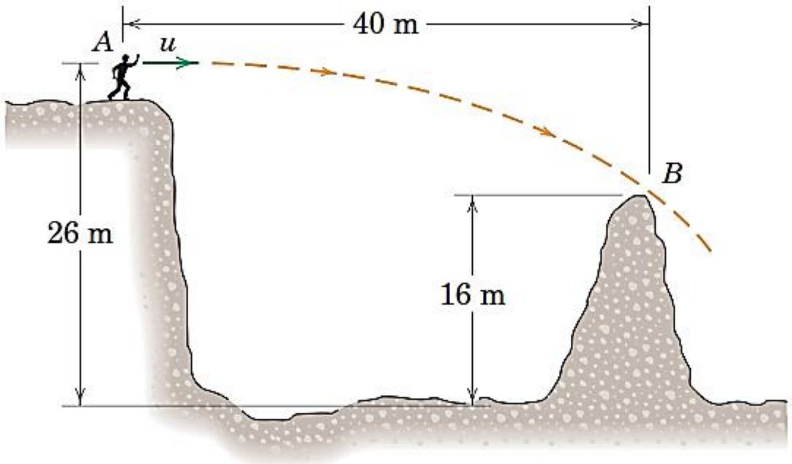
$$v_y = v_{y_0} + at \Rightarrow 0 = 278 \sin 60^\circ - 9,39\,t$$

$$\Rightarrow \boxed{t = 25,64\ s}$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta y \Rightarrow 0^2 - (278 \sin 60)^2 = -2 \times 9,39\,\Delta y$$

$$\boxed{\Delta y = h = 3086,42\ m}$$

سینماتیک ذرات



- حرکت منحنی الخط در صفحه:
  - ۲-۷۱ حداقل سرعت افقی u یک قطعه سنگ که پسربچه‌ای آنرا از نقطه A پرتاب می‌کند، چقدر بایستی باشد تا سنگ درست از روی مانع B عبور کند؟

حرکت عمودی $\quad y=-\frac{1}{2}gt^2+v_{0y}+y_0$

$$-(26-16)=-\frac{1}{2}\times 9{,}81\times t^2+0\times t+0$$

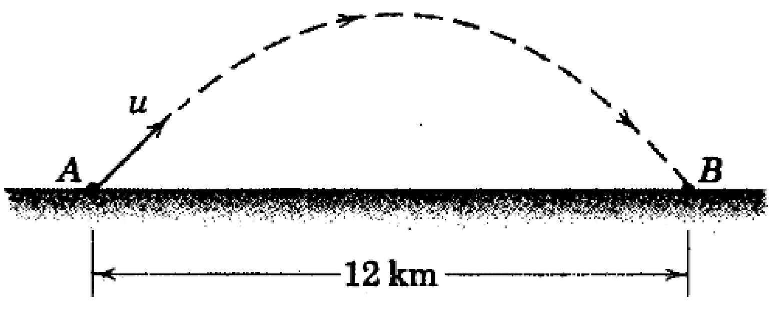
$$t^2=2{,}038 \rightarrow \boxed{t=1{,}4278\ s}$$

حرکت افقی $\quad x=v_{0x}t \Rightarrow x=u\times t$

$$40=u\times 1{,}4278 \Rightarrow \boxed{u=28{,}014\ \frac{m}{s}}$$

سینماتیک ذرات

- حرکت منحنی الخط در صفحه:
  - مثال:



۲–۷۵ مطلوب است محاسبه حداقل سرعت خـــروج u پرتابه‌ای که باید شلیک شود تا فاصله ۱۲ km بیـــن نقطـه A و هدف B را بپیماید.

سینماتیک ذرات

- حرکت منحنی الخط در صفحه:
  - مثال:

$$v_{x_0} = u\cos\theta$$

$$v_{y_0} = u\sin\theta$$

حرکت افقی

$$x = v_{x_0} t + x_0 \Rightarrow R = u\cos\theta\, t + 0 \quad (1)$$

حرکت عمودی

$$y = -\tfrac{1}{2} g t^2 + v_{y_0} t + y_0 \Rightarrow 0 = -\tfrac{1}{2} g t^2 + u\sin\theta\, t + 0 \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow t = \frac{R}{u\cos\theta}$$

$$(2) \Rightarrow t = 0,\ \frac{2u\sin\theta}{g}$$

$$\Rightarrow \frac{R}{u\cos\theta} = \frac{2u\sin\theta}{g}$$

سینماتیک ذرات

- حرکت منحنی الخط در صفحه:
  - مثال:

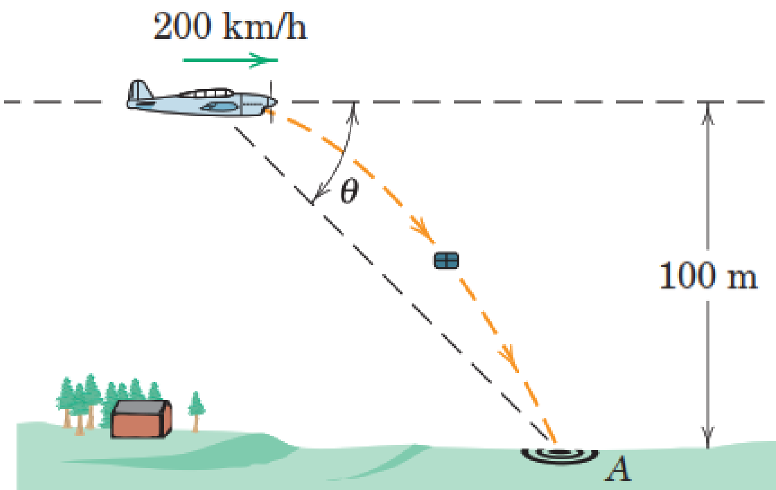
$$R = \frac{u^2 \, 2\sin\theta \cos\theta}{g} \Rightarrow \boxed{R = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g}}$$

می‌دانیم $\begin{cases} R_{max} \\ \sin 2\theta = 1 \end{cases} \Rightarrow 2\theta = 90^\circ \Rightarrow \boxed{\theta = 45^\circ}$

$$12 \times 1000 = \frac{u_{min}^2 \times 1}{9{,}81} \Rightarrow \boxed{u_{min} = 343{,}1 \ \frac{m}{s}}$$

سینماتیک ذرات

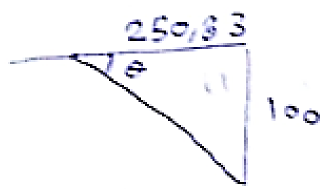
- حرکت منحنی الخط در صفحه:
  - ۸۰-۲ خلبان یک هواپیما که یک بسته پستی را به مقصد دور افتاده‌ای حمل می‌کند، می‌خواهد در حال حرکت بسته مزبور را در لحظه مناسب رها کند تا به داخل سبد پستی A بیفتد. در لحظه رها کردن بسته، زاویه دید خلبان (نسبت به هدف) با خط افق چقدر باید باشد؟ هواپیما با سرعت ۲۰۰ km/h در ارتفاع ۱۰۰ متری به صورت افقی پرواز می‌کند.



حرکت عمودی $\quad y = -\frac{1}{2} g t^2 + u_y t + y_0 \Rightarrow -100 = -\frac{1}{2} \times 9{,}81 \times t^2 + 0$

$$\Rightarrow \boxed{t = 4{,}515\ s}$$

حرکت افقی $\quad x = v_{x0} t + x_0 \Rightarrow x = \frac{200}{3{,}6} \times 4{,}515 + 0 = 250{,}83$



$$\Rightarrow \boxed{\theta = \tan^{-1}\left(\frac{100}{250{,}83}\right) = 21{,}7^\circ}$$