

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه فنی و حرفه‌ای

آمار و کاربرد آن در حسابداری

شیریا دیدهبان



آمار و کاربرد آن در حسابداری

فصل دوم:

توزیع احتمال‌های پیوسته



۱- توزیع نرمال

دانشگاه فنی و حرفه‌ای

مهمترین توزیع احتمالی است و در توزیع قد، وزن، نمره آزمون و مقدار بارندگی کاربرد فراوان دارد. متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 است، هرگاه دارای تابع چگالی زیر باشد.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < +\infty$$



دانشگاه فنی و حرفه‌ای

۱- توزیع نرمال

در این صورت می‌نویسیم $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

امید ریاضی و واریانس این توزیع به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$E(X) = \mu$$

$$V(X) = \sigma^2$$



دانشگاه فنی و حرفه‌ای

خواص توزیع نرمال

- 1- منحنی آن زنگوله‌ای شکل است.
- 2- میانگین، میانه و نما برابرند و در مرکز توزیع قرار دارند.
- 3- منحنی حول میانگین متقارن است.
- 4- منحنی پیوسته است و شکافی در آن وجود ندارد.
- 5- منحنی محور x ها را قطع نمی‌کند.



دانشگاه فنی و حرفه‌ای

خواص توزیع نرمال

6- سطح کل منحنی توزیع نرمال برابر 1 است.

7- سطح بین $\mu - \sigma$ و $\mu + \sigma$ تقریباً برابر 0/68 است.

8- سطح بین $\mu - 2\sigma$ و $\mu + 2\sigma$ برابر با 0/95 است.

9-

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$



۲- توزیع نرمال استاندارد

دانشگاه فنی و حرفه‌ای

متغیر تصادفی Z دارای توزیع نرمال استاندارد است هرگاه $Z \sim N(0,1)$. در واقع توزیع نرمال استاندارد حالت خاصی از توزیع نرمال است که در آن میانگین صفر و واریانس یک است. لذا تابع چگالی آن به صورت زیر است.

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad -\infty < z < +\infty$$



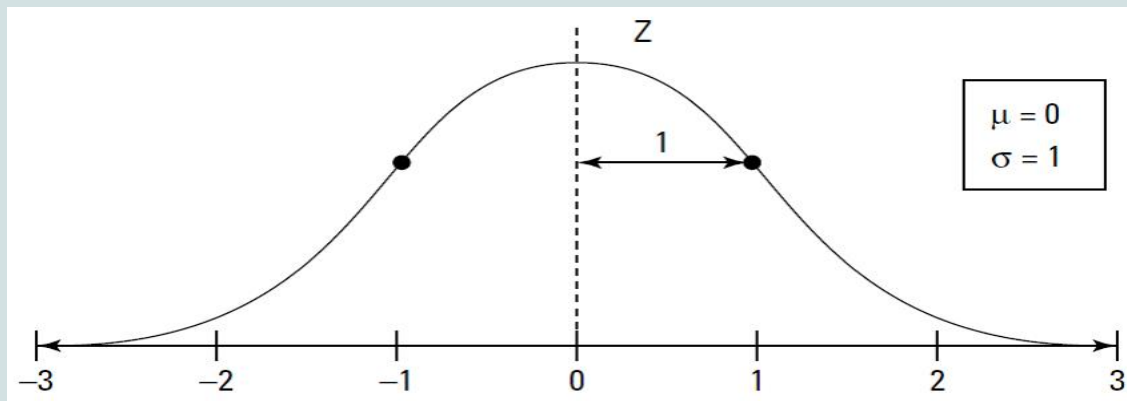
دانشگاه فنی و حرفه‌ای

۲- توزیع نرمال استاندارد

در این توزیع داریم:

$$P(Z > 0) = P(Z < 0) = \frac{1}{2}$$

توزیع نرمال استاندارد دارای نموداری به شکل زیر است.





دانشگاه فنی و حرفه‌ای

۲- توزیع نرمال استاندارد

در این توزیع میانگین، میانه و نما بر هم منطبق‌اند.

قرارداد: برای هر $0 \leq \alpha \leq 1$ ، Z_α عددی است که

$$P(Z \leq Z_\alpha) = \alpha$$

برقرار باشد.



دانشگاه فنی و حرفه‌ای

۲- توزیع نرمال استاندارد

نکته: اگر $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ باشد، آنگاه $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ دارای توزیع نرمال استاندارد است. یعنی

$$\frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$



۲- توزیع نرمال استاندارد

دانشگاه فنی و حرفه‌ای

مثال: فرض کنید توزیع نمرات یک کلاس، نرمال با میانگین 15 و واریانس 4 باشد. احتمال اینکه نمره یک دانشجوی به تصادف انتخاب شده کمتر یا مساوی 18.92 باشد، چقدر است؟ (از روی جدول نرمال)

$$(P(Z < 1.96) = 0.975)$$

$$X \sim N(15, 4) \quad Z = \frac{X - 15}{2}$$

$$P(X \leq 18.92) = P\left(\frac{X - 15}{2} \leq \frac{18.92 - 15}{2}\right) = P(Z < 1.96)$$

$$= 0.975$$



جعبه گالتون

دانشگاه فنی و حرفه‌ای

جعبه گالتون توسط سرفرانسیس گالتون، دانشمند انگلیسی در سال 1849 اختراع گردیده است که ماشینی برای شرح قضیه حد مرکزی و توزیع نرمال است.

در این جعبه چند هزار گلوله کوچک از میان چندین مسیر تعبیه شده سقوط می‌کنند و در نهایت، سطح زیر منحنی نرمال را می‌پوشانند.



جعبه گالتون

دانشگاه فنی و حرفه‌ای

احتمال عبور از هر کدام از این مسیرها برای تمام گلوله‌ها $\frac{1}{2}$ است.

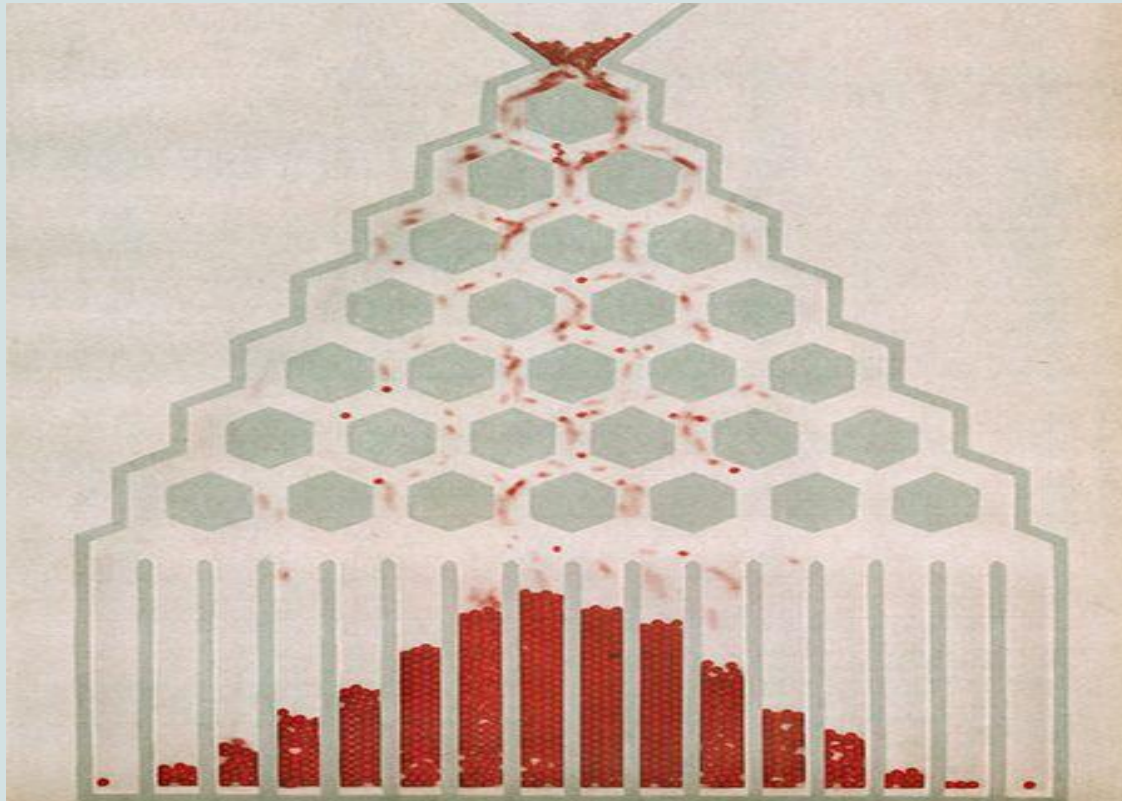
این ابزار نشان می‌دهد که گلوله‌ها هر مسیر تصادفی را که انتخاب کنند، به طور میانگین به صورت نرمال توزیع می‌شوند.



دانشگاه فنی و حرفه‌ای

جعبه گالتون

شکل جعبه گالتون به صورت زیر است.





۳- توزیع کای دو

دانشگاه فنی و حرفه‌ای

متغیر X دارای توزیع کای دو با n درجه آزادی است، هرگاه تابع چگالی آن به صورت

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \quad x > 0$$

باشد که در آن Γ تابع گاما است.



دانشگاه فنی و حرفه‌ای

۳- توزیع کای دو

تابع گاما به صورت

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

تعریف می‌شود.

برای توزیع کای دو می‌نویسیم $X \sim \chi^2_{(n)}$ و می‌خوانیم X دارای توزیع کای دو با n درجه آزادی است.



دانشگاه فنی و حرفه‌ای

۴- توزیع t - استودنت

تابع X دارای توزیع t - استودنت با پارامتر r است، هرگاه تابع چگالی آن به صورت

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{r+1}{2})}{\Gamma(\frac{r}{2})\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{(1+\frac{x^2}{r})^{\frac{r+1}{2}}} \quad -\infty < x < \infty$$

باشد که r درجه آزادی این توزیع نامیده می‌شود.



۴- توزیع t - استودنت

دانشگاه فنی و حرفه‌ای

امید ریاضی و واریانس برای این توزیع به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$E(X) = r$$

$$V(X) = \frac{r}{r-2}$$

