درس مکانیک سیالات ۲

فصل اول: تحلیل ابعادی و تشابه

1

مقدمه

- فرض کنید می خواهیم نیروی وارد از طرف جریان هوا بر یک اتومبیل در حال حرکت را بیابیم. به این منظور یک مدل با مقیاس ¼ از آن درست می کنیم تا در تونل باد آزمایش کنیم. خب شرایط آزمایش باید چگونه باشد تا بتوانیم بین آزمایش و حالت واقعی تشابه ایجاد کنیم و نتایج صحیحی بدست آوریم؟
- در این فصل با مفاهیم زیر آشنا می شویم تا بتوانیم به سوال فوق پاسخ بدهیم:

1. بدست آوردن گروه های بی بعد برای مسائل مختلف
2. آشنایی با گروه های بی بعد مهم و مفهوم آنها
3. شرایط بر قراری تشابه بین دو جریان

2

مقدمه

- اغلب پدیده های مکانیک سیالات به طرز پیچیده ای به پارامترهای هندسی و جریان وابسته اند. اگر یک کره صاف در یک جریان یکنواخت را در نظر بگیریم، برای تعیین نیروی درگ وارد بر کره (یعنی نیروی که جریان به کره وارد می کند) می توانیم پارامترهای زیر را در نظر بگیریم:

1. قطر کره
2. سرعت جریان
3. چگالی جریان
4. ویسکوزیته جریان

$$F = f(D, V, \rho, \mu)$$

نیرو درگ

- همانطور که مشاهده می کنید نیروی درگ را به ۴ پارامتر قبل اندازه گیری در آزمایشگاه مرتبط کردیم. حالا می خواهیم

3

مقدمه

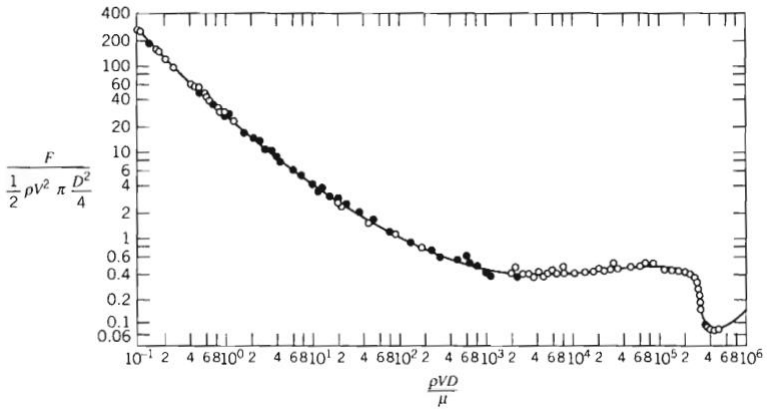
- میزان وابستگی این نیرو به ۴ پارامتر را از طریق آزمایش تعیین کنیم. برای تعیین اثر قطر و سرعت می توانیم ۱۰ کره با قطرهای مختلف را در ۱۰ سرعت متفاوت در نظر بگیریم که در این صورت باید ۱۰×۱۰ تا آزمایش انجام دهیم. حالا اگر ۱۰ حالت مختلف برای چگالی و ویسکوزیته نیز در نظر بگیریم تعداد کل آزمایش ها برابر با ۱۰×۱۰×۱۰×۱۰ خواهد که عملا امکان پذیر نیست. اگر برای این ۴ پارامتر و نیرو تحلیل ابعادی انجام دهیم خواهیم داشت:

$$\frac{F}{\rho V^2 D^2} = f(\frac{\rho V D}{\mu})$$

یعنی مقدار نیروی درگ تقسیم بر $\rho V^2 D^2$ تابعی است از پارامتر بی بعد $\frac{\rho V D}{\mu}$ پس برای تعیین نیروی درگ کافی است فقط نسبت های مختلف $\frac{\rho V D}{\mu}$ را تغییر دهیم. (نمودار اسلاید صفحه بعد)

4

مقدمه



$$\frac{F}{\rho V^2 D^2} = f(\frac{\rho VD}{\mu})$$

5

ابعاد پارامترهای مختلف در سیستم MLT

- از قبل می دانیم که در سیستم ابعادی MLT حرف های L،M و T به ترتیب نمایانگر جرم، طول و زمان هستند.
- θ بیانگر زمان است.

Quantity	Symbol	*MLTΘ*
Length	L	L
Area	A	L^2
Volume	$\mathcal{V}$	L^3
Velocity	V	LT^{-1}
Acceleration	dV/dt	LT^{-2}
Speed of sound	a	LT^{-1}
Volume flow	Q	L^3T^{-1}
Mass flow	$\dot{m}$	MT^{-1}
Pressure, stress	p, σ, τ	$ML^{-1}T^{-2}$
Strain rate	$\dot{\epsilon}$	T^{-1}
Angle	θ	None
Angular velocity	ω, Ω	T^{-1}
Viscosity	μ	$ML^{-1}T^{-1}$
Kinematic viscosity	ν	L^2T^{-1}
Surface tension	Υ	MT^{-2}
Force	F	MLT^{-2}
Moment, torque	M	ML^2T^{-2}
Power	P	ML^2T^{-3}
Work, energy	W, E	ML^2T^{-2}
Density	ρ	ML^{-3}
Temperature	T	Θ
Specific heat	c_p, c_v	$L^2T^{-2}\Theta^{-1}$
Specific weight	γ	$ML^{-2}T^{-2}$

6

قضیه π باکینگهام

- اگر یک پدیده فیزیکی را در نظر بگیریم که در ان پارامتر وابسته q_1 تابعی از n-1 پارمتر مستقل $q_1,q_2,\dots,q_n$ باشد یعنی $q_1 = f(q_2,q_3,\dots,q_n)$ یا $g(q_1,q_2,\dots,q_n) = 0$ در این صورت می توان n پارامتر داده شده را به صورت n-m نسبت بی بعد مستقل گروه بندی کرد. به این نسبت های بی بعد π می گویند. $\pi_1 = G(\pi_2,\dots,\pi_{n-m})$
- عدد m معمولا برابر با کمترین تعداد ابعاد مستقل است که برای مشخص کردن ابعاد تمام پارامترهای $q_1,q_2,\dots,q_n$ لازم است.
- تابع G را نمی توان از طریق این نظریه تعیین کرد.
- n-m پارامتر π مستقل از هم هستند.

7

روش تعیین گروه های π

1) تمام پارامترها را فهرست می کنیم
2) مجموعه ای از ابعاد اصلی را انتخاب می کنیم. (MLT یا FLT) (تعداد ابعاد اصلی برابر با r است)
3) ابعاد تمام پارامترها را بر حسب ابعاد اصلی می نویسیم.
4) r پارامتر را که ابعاد آنها در مجموع شامل تمام ابعاد اصلی باشد را به عنوان پارامترهای تکراری انتخاب می کنیم.
5) معادله های ابعادی را می نویسیم.
6) بررسی گروه های بی بعد بدست آمده

8

مثال: گروهای بی بعد را در مساله نیروی درگ وارد بر کره را تعیین نمائید.

تحلیل

داده : برای یک کره صاف، $F = f(\rho , V , D , \mu)$.

خواسته: گروه‌های بی‌بعد.

حل:

① $F \quad V \quad D \quad \rho \quad \mu$ $\qquad n = ۵$

② ابعاد اصلی M، L، t را انتخاب می‌کنیم.

③

F	V	D	ρ	μ	
$\frac{ML}{t^۲}$	$\frac{L}{t}$	L	$\frac{M}{L^۳}$	$\frac{M}{Lt}$	$r = ۳$

④ پارامترهای تکراری ρ، V، D را انتخاب می‌کنیم. $\qquad m = r = ۳$

⑤ $n - m = ۲$ گروه بی‌بعد به‌دست می‌آید. معادله‌های ابعادی را می‌نویسیم:

$$\Pi_۱ = \rho^a V^b D^c F = \left[\left(\frac{M}{L^۳}\right)^a \left(\frac{L}{t}\right)^b (L)^c \left(\frac{ML}{t^۲}\right)\right] = [M^۰ L^۰ t^۰]$$

9

مثال: گروهای بی بعد را در مساله نیروی درگ وارد بر کره را تعیین نمائید.

نماهای M، L، و t را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$\left.\begin{array}{lll} M: & a + ۱ = ۰ & \Rightarrow a = -۱ \\ L: & -۳a + b + c + ۱ = ۰ & \Rightarrow c = -۲ \\ t: & -b - ۲ = ۰ & \Rightarrow b = -۲ \end{array}\right\} \Rightarrow \Pi_۱ = \frac{F}{\rho V^۲ D^۲}$$

به طور مشابه،

$$\Pi_۲ = \rho^d V^e D^f \mu = \left(\frac{M}{L^۳}\right)^d \left(\frac{L}{t}\right)^e (L)^f \left(\frac{M}{Lt}\right) = M^۰ L^۰ t^۰$$

$$\left.\begin{array}{lll} M: & d + ۱ = ۰ & \Rightarrow d = -۱ \\ L: & -۳d + e + f - ۱ = ۰ & \Rightarrow f = -۱ \\ t: & -e - ۱ = ۰ & \Rightarrow e = -۱ \end{array}\right\} \Rightarrow \Pi_۲ = \frac{\mu}{\rho VD}$$

رابطه تابعی عبارت است از $\Pi_۱ = f(\Pi_۲)$؛ یا، همان‌طور که قبلاً گفته شد،

$$\frac{F}{\rho V^۲ D^۲} = f\left(\frac{\mu}{\rho VD}\right)$$

10

مثال: اگر افت فشار در جریان ویسکوز داخل لوله به صورت $\Delta P = f(\rho,\bar{V},D,l,\mu,e)$ باشد گروه های بی بعد را تعیین نمائید.

افت فشار Δp در جریان ویسکوز، تراکم‌ناپذیر و پایا در یک لوله مستقیم افقی، بستگی به طول l لوله، سرعت متوسط $\bar{V}$، ویسکوزیته μ سیال، قطر D لوله، چگالی ρ سیال و ارتفاع متوسط زبری e دارد.

تحلیل

داده : برای جریان در لوله دایره‌ای، $\Delta p = f(\rho, \bar{V}, D, l, \mu, e)$.

خواسته: گروه‌های بی‌بعد.

حل:

① $\Delta p \quad \rho \quad \mu \quad \bar{V} \quad l \quad D \quad e \qquad n = ۷$

② ابعاد اصلی M، L، t را انتخاب می‌کنیم.

11

مثال: اگر افت فشار در جریان ویسکوز داخل لوله به صورت $\Delta P = f(\rho,\bar{V},D,l,\mu,e)$ باشد گروه های بی بعد را تعیین نمائید.

③

Δp	ρ	μ	$\bar{V}$	l	D	e	
$\frac{M}{Lt^۲}$	$\frac{M}{L^۳}$	$\frac{M}{Lt}$	$\frac{L}{t}$	L	L	L	$r = ۳$

④ پارامترهای تکراری ρ، $\bar{V}$، D را انتخاب می‌کنیم. $m = r = ۳$

⑤ $n - m = ۴$ گروه بی‌بعد به‌دست می‌آید. معادله‌های ابعادی را می‌نویسیم:

$$\Pi_۱ = \rho^a \bar{V}^b D^c \Delta p = \left(\frac{M}{L^۳}\right)^a \left(\frac{L}{t}\right)^b (L)^c \left(\frac{ML}{Lt^۲}\right) = M^{\circ} L^{\circ} t^{\circ}$$

$$\begin{matrix} M: & ۰ = a + ۱ \\ L: & ۰ = -۳a + b + c - ۱ \\ t: & ۰ = -b - ۲ \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a = -۱ \\ b = -۲ \\ c = ۰ \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \Pi_۱ = \rho^{-۱} \bar{V}^{-۲} D^{۰} \Delta p = \frac{\Delta p}{\rho \bar{V}^۲}$$

$$\Pi_۲ = \rho^d \bar{V}^e D^f \mu = \left(\frac{M}{L^۳}\right)^d \left(\frac{L}{t}\right)^e (L)^f \frac{M}{Lt} = M^{\circ} L^{\circ} t^{\circ}$$

$$\begin{matrix} M: & ۰ = d + ۱ \\ L: & ۰ = -۳d + e + f - ۱ \\ t: & ۰ = -e - ۱ \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} d = -۱ \\ e = -۱ \\ f = -۱ \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \Pi_۲ = \frac{\mu}{\rho \bar{V} D}$$

$$\Pi_۳ = \rho^g \bar{V}^h D^i l = \left(\frac{M}{L^۳}\right)^g \left(\frac{L}{t}\right)^h (L)^i L = M^{\circ} L^{\circ} t^{\circ}$$

$$\begin{matrix} M: & ۰ = g \\ L: & ۰ = -۳g + h + i + ۱ \\ t: & ۰ = -h \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} g = ۰ \\ h = ۰ \\ i = -۱ \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \Pi_۳ = \frac{l}{D}$$

$$\Pi_۴ = \rho^j \bar{V}^k D^l e = \left(\frac{M}{L^۳}\right)^j \left(\frac{L}{t}\right)^k (L)^l L = M^{\circ} L^{\circ} t^{\circ}$$

$$\begin{matrix} M: & ۰ = j \\ L: & ۰ = -۳j + k + l + ۱ \\ t: & ۰ = -k \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} j = ۰ \\ k = ۰ \\ l = -۱ \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \Pi_۴ = \frac{e}{D}$$

تابع چنین است:

$$\Pi_۱ = f(\Pi_۲, \Pi_۳, \Pi_۴)$$

$$\frac{\Delta p}{\rho \bar{V}^۲} = f\left(\frac{\mu}{\rho \bar{V} D}, \frac{l}{D}, \frac{e}{D}\right)$$

12

گروه های بی بعد مهم

- نیروی اینرسی که با $\rho V^2 L^2$ متناسب است در اکثر مسائل مکانیک سیالات غالب است. نسبت نیروی اینرسی به هریک از نیروهای ویسکوزیته (μVL)، فشاری ($\Delta P L^2$)، گرانشی ($g\rho L^3$)، کشش سطحی (σL) و تراکم پذیری ($E_v L^2$) ۵ گروه بی بعد مهم را تشکیل می دهند که در ادامه بررسی می کنیم.

۱- عدد رینولدز: نسبت نیروی اینرسی به نیروی ویسکوز

در جریان های لزج مهم است

$$Re = \frac{\rho VL}{\mu} = \frac{VL}{v}$$

۲-عدد اویلر: نسبت نیروی فشار به اینرسی یا نسبت فشار استاتیکی به دینامیکی

کاربرد در مطالعه هیدرودینامیک و آیرودینامیک

ضریب فشار نیز می نامند

$$Eu = C_p = \frac{\Delta P}{\frac{1}{2}\rho V^2}$$

13

گروه های بی بعد مهم

فشار بخار در دمای آزمایش

فشار در جریان مایع

- **عدد کاویتاسیون یا حفره زایی**

هرچه این عدد کوچکتر باشد احتمال حفره زایی بیشتر است

$$C_a = \frac{\Delta P}{\frac{1}{2}\rho V^2} = \frac{P - P_v}{\frac{1}{2}\rho V^2}$$

۳-عدد فرود: نسبت نیروی اینرسی به گرانش

در مطالعه جریان با سطح آزاد مهم است

L طول مشخصه جریان

$$\mathrm{Fr} = \frac{V}{\sqrt{gL}}$$

۴-عدد وبر: نسبت نیروی اینرسی به کشش سطحی

کاربرد در قطره ها و جریان در لوله موئین

$$\mathrm{We} = \frac{\rho V^2 L}{\sigma}$$

14

گروه های بی بعد مهم

۵-عدد ماخ: نسبت نیروی اینرسی به نیروی تراکم پذیری

$$M = \frac{V}{C}$$

C سرعت صوت

در جریان های تراکم پذیر با M>0.3 مهم است

- **ضریب برا: نسبت نیروی لیفت به نیروی دینامیکی**

$$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 A}$$

- **ضریب پسا: نسبت نیروی درگ به نیروی دینامیکی**

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 A}$$

- **عدد پرانتل: نسبت پخش حرارتی به هدایت حرارتی**

$$Pr = \frac{\mu C_P}{K} = \frac{v}{\alpha}$$

15

تشابه جریان

- سه شرط اصلی برای برقراری تشابه وجود دارد:

1. تشابه هندسی: مدل و نمونه اصلی دارای شکل مشابه و نسبت ابعاد یکسان داشته باشند
2. تشابه سینماتیکی: خطوط جریان برای نمونه اصلی و مدل مشابه باشند یعنی بردار های سرعت برای هر دو هم جهت و نسبت اندازه برابر باشند.
3. تشابه دینامیکی: توزیع نیروها برای نمونه اصلی و مدل هم جهت و نسبت یکسان داشته باشند.

- ✓ برای بر قراری تشابه دینامیکی باید هم تشابه هندسی بر قرار باشد و نیروهای موجود در نقاط مشابه یکسان باشند
- ✓ **برای بر قراری تشابه دینامیکی باید مقدار هریک از گروه های بی بعد در نمونه اصلی و مدل یکسان باشند.**

16

تشابه جریان

- مثال: قرار است مدل یک زیر دریایی در داخل تونل باد مورد آزمایش قرار گیرد. مقیاس طولی مدل $\frac{1}{20}$ است. سرعت، فشار و دمای هوا در محلی دور از مدل به ترتیب $100\frac{m}{s}$، $800\ kpa$ و $50℃$ است. اگر $\vartheta_{water} = 1.3 \times 10^{-6}$ و $\rho_{water} = 1004\ kg/m^3$ باشد سرعت زیر دریایی و نسبت نیروی درگ نمونه اصلی به مدل را بیابید.

$\mu_{air} = 1.8 \times 10^{-5}\ N.s/m^2$

- حل: باید تشابه دینامیکی بین شرایط واقعی (نمونه اصلی) و آزمایش (مدل) بر قرار باشد.

خواسته مسئله سرعت نمونه اصلی و نسبت نیرو ها است.

چون جریان لزج است پس باید عدد رینولدز ها برای دو حالت با هم برابر باشند.

زیر وند m برای پارامترهای مدل و زیر وند p را برای پارامترهای نمونه اصلی استفاده می کنیم.

17

تشابه جریان

$$Re_m = Re_p$$

$$\frac{V_m L_m}{\vartheta_m} = \frac{V_p L_p}{\vartheta_p} \Rightarrow V_p = \frac{V_m L_m}{L_p}\vartheta_p/\vartheta_m$$

حالا باید ویسکوزیته سینماتیکی مدل یعنی هوا را در شرایط آزمایش تعیین کنیم (ϑ_m). از معادله حالت برای گاز ایده آل استفاده می کنیم تا ابتدا چگالی هوا را بیابیم و سپس ویسکوزیته سینماتیکی را

$$\rho_{air} = \frac{p}{RT} = \frac{800}{0.287(50+273)} = 8.627\frac{kg}{m^3}$$

$$\vartheta_m = \frac{\mu_{air}}{\rho_{air}} = 2.086 \times 10^{-6}$$

$$V_p = 100 \times \frac{1}{20} \times \frac{1.3 \times 10^{-6}}{2.086 \times 10^{-6}} = 3.116\ m/s$$

18

تشابه جریان

برای پیدا کردن نسبت نیروها باید ضریب درگ در دو حالت را باهم برابر قرار دهیم.

$$C_{D_m} = C_{D_p}$$

$$\frac{F_{D_m}}{\frac{1}{2}\rho_m V_m^2 L_m^2} = \frac{F_{D_p}}{\frac{1}{2}\rho_p V_p^2 L_p^2}$$

$$\frac{F_{D_p}}{F_{D_m}} = \left(\frac{\rho_p}{\rho_m}\right)\left(\frac{V_p}{V_m}\right)^2\left(\frac{L_p}{L_m}\right)^2 = 45.2$$

19

تشابه جریان

مثال: هواپیمایی با سطح مقطع ۴۰ متر مربع با سرعت ۳۲۰ کیلومتر بر ساعت در ارتفاع ۳ کیلومتری سطح زمین پرواز می کند. اگر ضریب پسا برای مدلی از هواپیما که در تشابه با نمونه اصلی است برابر با ۰.۰۱۱ باشد توان لازم برای حرکت هواپیما چقدر است؟

حل: با استفاده از جدول آخر کتاب در ارتفاع ۳۰۰۰ متری دمای هوا ۲۶۸.۷ کلوین و چگالی برابر با ۰.۹ کیلوگرم بر مترمکعب است. ابتدا بررسی می کنیم که جریان تراکم ناپذیر باشد، بدین منظور باید عدد ماخ را حساب کنیم

$$V = 320\frac{km}{h} \div 3.6 = 88.8\frac{m}{s}$$

سرعت صوت $c = \sqrt{\gamma RT} = \sqrt{1.4 \times 287 \times 268.7} = 328.58\frac{m}{s} \quad \Rightarrow M = \frac{V}{C} = \frac{88.8}{328.58} = 0.27 < 0.3 \rightarrow$ جریان تراکم ناپذیر

$$C_D = 0.011 \rightarrow F_D = \frac{1}{2}C_D\rho V^2 A = 0.5(0.011)(0.9)(88.8)^2(40) = 1561.3\ N$$

توان $\mathrm{P} = F_D \times V = 1561(88.8) = 138.6\ KW$

20

تمرینات

۱- جریان آب در دمای ۲۰ درجه سلسیوس با سرعت 2 m/s از روی کره به قطر 8 cm عبور می کند و نیروی درگ ۵ نیوتن را به آن وارد می کند. سرعت و نیروی وارد بر یک بالن کروی شکل به قطر 1.5 m را که در هوا در شرایط استاندارد سطح دریا قرار دارد را بیابید. بین دو جریان تشابه دینامیکی بر قرار است.

standard air take $\rho \approx 1.2255$ kg/m^3 and $\mu \approx 1.78$E−5 kg/m·s.

For water at 20°C take $\rho \approx 998$ kg/m^3 and $\mu \approx 0.001$ kg/m·s.

۲-تنش برشی وارد بر دیواره در جریان بین شکاف یک استوانه ثابت و دوار برابر τ_wاست که به چگالی سیال (ρ)، ویسکوزیته (μ)، سرعت زاویه ای (ω)، شعاع خارجی (R) و اندازه شکاف (Δr) وابسته است. با فرض ρ، R و ω به‌عنوان متغیرهای تکراری گروه های بی بعد مهم را تعیین نمایید.

21